

Strikter Gibbs–KMS-Beweis im endlichen Matrixfall

Standardliteratur-konform und präzise auf den Lean-Formalismus von REALOQS abgebildet

Editor: Jan Seeck (antaris) • Ghostwriter: ChatGPT

23. März 2026

Ziel. Dieses Dokument formuliert den *strikten* Gibbs–KMS-Satz in genau dem endlichen Typ-I-Kontext, den der aktive Lean-Pfad liefert, und schreibt den Beweis in der Form

(1) Voraussetzungen (2) Theorem (3) Beweis.

Dabei wird die Standardliteratur nicht paraphrastisch, sondern in ihrer mathematischen Struktur auf den vorliegenden Formalismus abgebildet. Die Codebasis wird nur über Modul- und Objektbezüge referenziert; es werden keine Codefragmente reproduziert.

Standardreferenzen. Für die Entstehung und Standardform der KMS-Randbedingungen vgl. Kubo [1], Martin–Schwinger [2] und Haag–Hugenholtz–Winnink [3]. Für die etablierte operatoralgebraische Standarddarstellung vgl. Bratteli–Robinson [4] sowie die komprimierte Übersicht von Dereziński–Pillet [5]. Insbesondere wird dort für den endlichen Fall explizit die Gibbs-Formel

$$\omega_\beta(A) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})}$$

und die zugehörige KMS-Randbedingung für die Heisenberg-Dynamik $\tau_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$ hervor-
gehoben [5].

Vorab: Geltungsbereich und Reviewer-Notiz

Es wird *nur* der endliche Matrixfall behandelt. Präzise:

- endlicher Träger Ω mit Lean-Annahmen `[Fintype Omega]`, `[DecidableEq Omega]`,
- zusätzlich `[Nonempty Omega]` auf der Ebene des eigentlichen KMS-Satzes,
- Algebra $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$,
- reelle symmetrische Matrix $L \in \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $L^\top = L$,
- inverse Temperatur $\beta > 0$.

Es wird *nicht* behauptet, hier bereits den thermodynamischen Limes, Typ-III-Strukturen, Wightman-Axiome oder raumzeitliche AQFT-Vollstärke zu beweisen. Der vorliegende Satz ist genau der strikte finite Gibbs–KMS-Schritt des aktiven Matrixpfads.

Tabellarische Gegenüberstellung: Standardbeweis — Lean-Formalismus

Lesekonvention. In der Modulspealte werden bewusst nur die Dateinamen angegeben; sie sind sämtlich relativ zu `REALOQS/PillarB/AQFT/` bzw. `REALOQS/PillarB/AQFT/Derived/` zu lesen.

Standardliteratur	Vorliegender Formalismus / Lean-Objekte	Lean-Modul
Endliche Observable-Algebra $B(\mathcal{H})$ bzw. $M_n(\mathbb{C})$ Hermitescher Hamiltonoperator $H = H^*$	Endliche Matrixalgebra $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$ auf dem Randträger Ω ; Matrix- C^* -Struktur auf <code>Mat Omega</code> Komplexifizierung der reellen symmetrischen Randmatrix L ; Objekt <code>fullHamiltonian</code> und Hermitizität aus $L^\top = L$	<code>BoundaryMatrixCStar.lean</code> <code>BoundaryMatrixFullExp.lean</code>

Standardliteratur	Vorliegender Formalismus / Lean-Objekte	Lean-Modul
Exponentialabbildung e^{zH}	Banachalgebra-Exponential auf Matrizen; Objekt <code>hamExp</code> ; Additivität via <code>hamExp_add</code>	<code>BoundaryMatrixFullExp.lean</code>
Heisenberg-Dynamik $\tau_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$	Aktiver KMS-Pfad mit Minus-Orientierung: <code>unitaryFromLMinus</code> , <code>unitaryFromLPlus</code> , <code>fullBoundaryDynMinus</code> und $\alpha_t^-(A) = e^{-itH} A e^{itH}$	<code>BoundaryMatrixFullExp.lean</code> ; <code>BoundaryMatrixFullDynamics.lean</code>
Gibbs-Gewicht $e^{-\beta H}$ Partitionfunktion $Z_\beta = \text{Tr}(e^{-\beta H})$	Objekt <code>gibbsOpCoreAtBeta</code> mit $G_\beta = e^{-\beta H}$ Lean-typisiert als <code>boundaryDensityZAtBeta</code> $= \Re \text{Tr}(e^{-\beta H})$; im endlichen hermiteschen Fall die übliche reellwertige Partitionfunktion	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code> <code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code> ; <code>BoundaryMatrixDensityState.lean</code>
Dichtematrix $\rho_\beta = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H}$ Gibbs-Zustand $\omega_\beta(A) = \text{Tr}(\rho_\beta A)$	Objekt <code>densityMatrixCoreAtBeta</code> Objekte <code>boundaryDensityStateMatAtBeta</code> und <code>boundaryDensityStateAtBeta</code>	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code> <code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Analytischer KMS-Kern auf dem Streifen Analytizität des Kerns	Objekt <code>fullKMSKernelMinusAtBeta</code> mit $F_{A,B}(z) = \text{Tr}(\rho_\beta e^{-izH} A e^{izH} B)$ Objekt <code>fullKMSKernelMinusAtBeta_differentiable</code> ; daraus Holomorphie auf dem offenen Streifen und Stetigkeit auf dem Abschluss	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code> <code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Untere Randgleichung	Objekt <code>fullKMSKernelMinusAtBeta_re_boundary</code> mit $F_{A,B}(t) = \varphi_\beta(\alpha_t^-(A)B)$	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Obere Randgleichung	Objekt <code>fullKMSKernelMinusAtBeta_top_boundary</code> mit $F_{A,B}(t + i\beta) = \varphi_\beta(B\alpha_t^-(A))$	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Invarianz des Gibbs-Zustands	Objekt <code>boundaryDensityStateMatAtBeta_invariant_fullDynMinus</code> ; direkte Spurrechnung, nicht bloß Folgerung im Nachhinein	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Zusammenbau zum KMS-Satz	Repo-Form <code>IsKMS</code> ; Objekte <code>boundaryDensityState_isKMS_minus_atBeta</code> und als Bundle <code>boundaryFullKMSMinusAtBeta</code>	<code>KMS.lean</code> ; <code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>

(1) Voraussetzungen

Wir arbeiten *genau* im aktuell formalisierten endlichen Matrixkontext.

(1.1) Algebraischer Träger

Sei Ω eine nichtleere endliche Menge. Dann ist

$$\mathcal{A} := \text{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$$

die komplexe Matrixalgebra auf Ω .

(1.2) Hamiltonoperator aus der Randmatrix

Gegeben sei eine reelle Matrix

$$L \in \text{Mat}(\Omega, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad L^\top = L.$$

Daraus wird der komplexe Hamiltonoperator durch kanonische Komplexifizierung definiert:

$$H := H(L), \quad H_{ij} := (L_{ij} : \mathbb{C}).$$

Wegen $L^\top = L$ ist H hermitesch.

(1.3) Exponential- und Dynamikzweige

Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$E(z) := e^{zH}.$$

Im aktiven KMS-Pfad wird *nicht* die Plus-, sondern die Minus-Orientierung als eigentliche KMS-Dynamik verwendet. Definiert werden

$$U_t^- := e^{-itH}, \quad U_t^+ := e^{itH}, \quad \alpha_t^-(A) := U_t^- A (U_t^-)^* = U_t^- A U_t^+.$$

Da $H = H^*$ gilt, sind U_t^\pm unitär und $U_t^+ = (U_t^-)^*$.

(1.4) Gibbs-Operator, Normierung und Zustand

Sei ferner $\beta > 0$. Dann definieren wir

$$G_\beta := e^{-\beta H}.$$

Im Lean-Formalismus ist die Normierung reellwertig typisiert als

$$Z_\beta := \Re \operatorname{Tr}(G_\beta).$$

Im vorliegenden hermiteschen endlichen Fall ist $\operatorname{Tr}(G_\beta)$ reell und positiv, so dass dies exakt der Standard-Partitionfunktion entspricht. Die kanonische Gibbs-Dichtematrix ist daher

$$\rho_\beta := Z_\beta^{-1} G_\beta,$$

und der Zustand auf \mathcal{A} ist

$$\varphi_\beta(A) := \operatorname{Tr}(\rho_\beta A).$$

(1.5) Form der KMS-Bedingung

Die formale KMS-Strip-Definition im Repo fordert für alle $A, B \in \mathcal{A}$ die Existenz einer Funktion

$$F_{A,B} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $F_{A,B}$ ist auf dem offenen Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < \beta\}$ holomorph,
- (b) $F_{A,B}$ ist auf dem abgeschlossenen Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq \beta\}$ stetig,
- (c) für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_{A,B}(t) = \varphi_\beta(\alpha_t^-(A)B),$$

- (d) für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_{A,B}(t + i\beta) = \varphi_\beta(B\alpha_t^-(A)).$$

Das ist die exakte Repo-Form der KMS-Randbedingung.

(2) Theorem

Satz. Sei Ω nichtleer und endlich, $L \in \operatorname{Mat}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $L^\top = L$ und $\beta > 0$. Definiere

$$H := H(L), \quad \alpha_t^-(A) := e^{-itH} A e^{itH}, \quad \varphi_\beta(A) := \operatorname{Tr}(Z_\beta^{-1} e^{-\beta H} A), \quad Z_\beta := \Re \operatorname{Tr}(e^{-\beta H}).$$

Dann ist φ_β ein (α^-, β) -KMS-Zustand auf $\mathcal{A} = \operatorname{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$ im exakten Sinn der Repo-Definition *IsKMS*. Präzise gilt:

$$\varphi_\beta \in \operatorname{KMS}(\mathcal{A}, \alpha^-, \beta).$$

Äquivalent in Lean-Notation:

IsKMS (D := fullBoundaryDynMinus L hL) beta (boundaryDensityStateAtBeta L beta hL).toStateOn

(3) Beweis

(3.1) Hermitizität des Hamiltonoperators und unitäre Zeitentwicklung

Aus $L^\top = L$ folgt per Komplexifizierung

$$H^* = H.$$

Damit sind für reelles t die Operatoren

$$U_t^- := e^{-itH}, \quad U_t^+ := e^{itH}$$

unitär und erfüllen

$$(U_t^-)^* = U_t^+, \quad (U_t^+)^* = U_t^-.$$

Zugleich gilt wegen gleicher Generatorachse die Additivität der Exponentialfamilie

$$e^{(z+w)H} = e^{zH} e^{wH} \quad (z, w \in \mathbb{C}),$$

so dass insbesondere

$$U_{s+t}^- = U_s^- U_t^-.$$

Das ist genau die algebraische Grundlage der formalen Dynamik α_t^- . Dieser Schritt entspricht der Standardliteratur für endliche Heisenberg-Dynamik und wird im Lean-Pfad über das Matrixexponential auf Banachalgebren realisiert [5, 4].

(3.2) Gibbs-Dichtematrix und ihre Kommutativität mit der Dynamik

Per Definition ist

$$\rho_\beta = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H}.$$

Sowohl $e^{-\beta H}$ als auch e^{-itH} sind Exponentialausdrücke desselben Operators H . Daher kommutieren sie:

$$\rho_\beta U_t^- = U_t^- \rho_\beta.$$

Dies ist die endliche Standardbeobachtung, dass Gibbs-Gewicht und Hamiltonfluss dieselbe Spektralzerlegung teilen. Im Lean-Pfad wird diese Kommutativität nicht spektraltheoretisch, sondern unmittelbar aus der Exponentialadditivität entlang desselben Generators gewonnen.

(3.3) Invarianz des Gibbs-Zustands

Für $A \in \mathcal{A}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(\alpha_t^-(A)) &= \text{Tr}(\rho_\beta U_t^- A (U_t^-)^*) \\ &= \text{Tr}(U_t^- \rho_\beta A (U_t^-)^*) && \text{(wegen } \rho_\beta U_t^- = U_t^- \rho_\beta) \\ &= \text{Tr}((U_t^-)^* U_t^- \rho_\beta A) && \text{(Zyklizität der Spur)} \\ &= \text{Tr}(\rho_\beta A) \\ &= \varphi_\beta(A). \end{aligned}$$

Also ist φ_β invariant unter α^- . Dieser Schritt wird im Lean-Satz separat bewiesen, bevor der eigentliche KMS-Strip zusammengebaut wird. Er entspricht zugleich der Standardtatsache, dass KMS-/Gibbs-Zustände Gleichgewichtszustände sind [5, 4].

(3.4) Wahl des KMS-Kerns

Für feste $A, B \in \mathcal{A}$ definieren wir

$$F_{A,B}(z) := \mathrm{Tr}(\rho_\beta e^{-izH} A e^{izH} B), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dies ist exakt die mathematische Gestalt des im Lean-Pfad verwendeten Kerns

`fullKMSKernelMinusAtBeta.`

Da $z \mapsto e^{-izH}$ und $z \mapsto e^{izH}$ ganze Matrixfunktionen sind, ist auch $F_{A,B}$ ganz, insbesondere holomorph auf dem offenen Streifen $0 < \Im z < \beta$ und stetig auf seinem Abschluss.

(3.5) Untere Randbedingung

Für reelles t erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t) &= \mathrm{Tr}(\rho_\beta e^{-itH} A e^{itH} B) \\ &= \mathrm{Tr}(\rho_\beta \alpha_t^-(A) B) \\ &= \varphi_\beta(\alpha_t^-(A) B). \end{aligned}$$

Damit ist die untere Randgleichung genau erfüllt.

(3.6) Obere Randbedingung

Nun sei $t \in \mathbb{R}$. Wegen der Exponentialadditivität entlang desselben Generators gilt

$$e^{-i(t+i\beta)H} = e^{\beta H} e^{-itH}, \quad e^{i(t+i\beta)H} = e^{itH} e^{-\beta H}.$$

Also folgt

$$F_{A,B}(t + i\beta) = \mathrm{Tr}(\rho_\beta e^{\beta H} e^{-itH} A e^{itH} e^{-\beta H} B).$$

Da $\rho_\beta = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H}$, erhält man

$$\rho_\beta e^{\beta H} = Z_\beta^{-1} \mathbf{1}.$$

Somit

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t + i\beta) &= \mathrm{Tr}(Z_\beta^{-1} e^{-itH} A e^{itH} e^{-\beta H} B) \\ &= Z_\beta^{-1} \mathrm{Tr}(e^{-itH} A e^{itH} e^{-\beta H} B). \end{aligned}$$

Nun wenden wir Zyklizität der Spur an und rotieren den letzten Faktor nach vorne:

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t + i\beta) &= Z_\beta^{-1} \mathrm{Tr}(e^{-\beta H} B e^{-itH} A e^{itH}) \\ &= \mathrm{Tr}(\rho_\beta B \alpha_t^-(A)) \\ &= \varphi_\beta(B \alpha_t^-(A)). \end{aligned}$$

Damit ist die obere Randgleichung exakt in der Repo-Form gezeigt.

(3.7) Schluss: Erfüllung der KMS-Definition

Aus den Schritten (3.3) bis (3.6) folgt:

- (i) $\beta > 0$,
- (ii) φ_β ist invariant unter α^- ,

- (iii) für alle $A, B \in \mathcal{A}$ existiert ein Kern $F_{A,B}$, der auf dem offenen Streifen holomorph, auf dem abgeschlossenen Streifen stetig ist und exakt die beiden KMS-Randgleichungen erfüllt.

Das ist genau die Definition eines (α^-, β) -KMS-Zustands. Also ist φ_β ein (α^-, β) -KMS-Zustand auf \mathcal{A} . \square

Korollar. *Unter denselben Voraussetzungen existiert im starken C^* -basierten Repo-Sinn der gebündelte Zeuge*

$$\text{boundaryFullKMSMinusAtBeta}$$

als C^ -KMS-Zustand auf der Minus-Branch-Dynamik. Dieser Bundle-Satz ist keine zusätzliche Physik, sondern der formale Zusammenschluss des soeben bewiesenen IsKMS-Satzes mit dem zugehörigen Dynamik- und Zustandsobjekt.*

Präzisionshinweise für einen harten Review

1. **Kein Signenschmuggel.** Die Standardliteratur formuliert oft mit $\tau_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$. Der aktive Lean-KMS-Pfad benutzt dagegen bewusst die Minus-Orientierung $\alpha_t^-(A) = e^{-itH} A e^{itH}$. Der obige Beweis ist genau in dieser Minus-Konvention geführt.
2. **Keine unsaubere Partitionfunktion.** Im Code ist Z_β reell typisiert als $\Re \text{Tr}(e^{-\beta H})$. Im vorliegenden endlichen hermiteschen Fall ist dies die übliche Gibbs-Normierung; diese Präzision ist notwendig, um die Codeaussage exakt zu treffen.
3. **Kein unzulässiger Sprung von “physikalisch plausibel” zu “formal bewiesen”.** Holomorphie, Invarianz und Randgleichungen werden alle separat geliefert und erst danach zur IsKMS-Struktur zusammengesetzt.
4. **Kein Overclaiming.** Der Satz ist vollständig korrekt im endlichen Matrixkontext; er ist nicht bereits der thermodynamische oder AQFT-volle Grenzfall.

Literatur

- [1] R. Kubo, *Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems*, Journal of the Physical Society of Japan **12** (1957), 570–586. DOI: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.12.570>.
- [2] P. C. Martin and J. Schwinger, *Theory of Many-Particle Systems. I*, Physical Review **115** (1959), 1342–1373. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.1342>.
- [3] R. Haag, N. M. Hugenholtz und M. Winnink, *On the equilibrium states in quantum statistical mechanics*, Communications in Mathematical Physics **5** (1967), 215–236. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01646342>.
- [4] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03444-6>.
- [5] J. Dereziński and C.-A. Pillet, *KMS states*, online survey note, 3 pp., PDF metadata dated 2007 (the manuscript itself prints no year). URL: <https://pillet.univ-tln.fr/data/pdf/KMS-states.pdf>.