

Strikter Gibbs–KMS-Beweis im endlichen Matrixfall

Rev. 1

Reiner mathematischer Beweistext nach Standardliteratur; Lean-Abbildung nur im Anhang

Editor: Jan Seeck (antaris) • Ghostwriter: Claude (Anthropic)

25. März 2026

Ziel. Dieses Dokument formuliert den Gibbs–KMS-Satz im *endlichen Matrixfall* in der Form

(0) Definitionen (1) Voraussetzungen (2) Theorem (3) Beweis.

Der Haupttext ist bewusst als *reiner mathematischer Beweistext* geschrieben. Die Abbildung auf den Lean-Formalismus von REALOQS wird separat in einem Anhang dokumentiert.

Standardreferenzen. Für die Entstehung und Standardform der KMS-Randbedingungen vgl. Kubo [1], Martin–Schwinger [2] und Haag–Hugenholtz–Winnink [3]. Für die etablierte operatoralgebraische Standarddarstellung vgl. Bratteli–Robinson [4] sowie die komprimierte Übersicht von Dereziński–Pillet [5]. Insbesondere wird dort für den endlichen Fall explizit die Gibbs-Formel

$$\omega_\beta(A) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})}$$

und die zugehörige KMS-Randbedingung für die Heisenberg-Dynamik $\tau_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$ hervorgehoben [5].

(0) Definitionen

(0.1) Die Indexmenge Ω

Sei Ω eine endliche, nichtleere Menge. Wir verwenden Ω ausschließlich als *Indexmenge* der Zeilen und Spalten der im Folgenden betrachteten Matrizen. Die Menge Ω trägt selbst keine algebraische oder topologische Struktur. Der folgende Satz hängt nur von der Endlichkeit und Nichtleerheit von Ω ab und gilt unabhängig davon, welche konkrete Menge gewählt wird.

(0.2) Die Matrixalgebra $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$

Für einen Körper K sei

$$\mathrm{Mat}(\Omega, K) := \{A \mid A : \Omega \times \Omega \rightarrow K\}$$

die Menge aller Abbildungen $\Omega \times \Omega \rightarrow K$, aufgefasst als $\Omega \times \Omega$ -Matrizen über K . Für $A, B \in \mathrm{Mat}(\Omega, K)$, $\lambda \in K$ und $i, j \in \Omega$ definieren wir

$$(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}.$$

Für $K = \mathbb{C}$ definieren wir die Matrixmultiplikation

$$(AB)_{ij} := \sum_{k \in \Omega} A_{ik} B_{kj}.$$

Die Endlichkeit von Ω stellt sicher, dass diese Summe stets wohldefiniert und endlich ist. Das Einselement ist $(\mathbf{1})_{ij} := \delta_{ij}$. Ferner definieren wir die Involution

$$(A^*)_{ij} := \overline{A_{ji}}$$

und die Spur

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i \in \Omega} A_{ii}.$$

Die Spur erfüllt insbesondere die *Zyklizität*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \quad \text{für alle } A, B \in \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{C}),$$

$$\text{denn } \mathrm{Tr}(AB) = \sum_i \sum_k A_{ik} B_{ki} = \sum_k \sum_i B_{ki} A_{ik} = \mathrm{Tr}(BA).$$

Mit diesen Operationen ist

$$\mathcal{A} := \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$$

eine endlichdimensionale, assoziative, unitale C^* -Algebra. Sämtliche algebraischen Eigenschaften — Assoziativität der Multiplikation, Existenz des Einselements, Eigenschaften der Involution und der Spur — folgen aus den obigen Definitionen über dem Körper $\mathbb{C}$. Die Indexmenge Ω bestimmt lediglich die Dimension der Algebra.

(0.3) Die Randmatrix L und der Hamiltonoperator H

Es sei

$$L \in \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{R})$$

eine reelle $\Omega \times \Omega$ -Matrix mit Einträgen $L_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i, j \in \Omega$. Aus L wird durch kanonische Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ der Hamiltonoperator

$$H := H(L) \in \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{C}), \quad H_{ij} := L_{ij}$$

definiert.

(0.4) Die Dynamik

Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\alpha_t^-(A) := e^{-itH} A e^{itH} \quad (A \in \mathcal{A}).$$

(0.5) Gibbs-Gewicht, Normierung und Zustand

Für $\beta > 0$ definieren wir

$$G_\beta := e^{-\beta H}, \quad Z_\beta := \mathrm{Tr}(G_\beta), \quad \rho_\beta := Z_\beta^{-1} G_\beta, \quad \varphi_\beta(A) := \mathrm{Tr}(\rho_\beta A).$$

(1) Voraussetzungen

(1.1) Algebraischer Träger

Die in (0.1) definierte Menge Ω sei endlich und nichtleer. Dann ist die in (0.2) definierte Algebra

$$\mathcal{A} := \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$$

eine endlichdimensionale, assoziative, unitale C^* -Algebra.

(1.2) Symmetrie von L und Hermitizität von H

Die in (0.3) definierte Matrix L erfülle

$$L \in \mathrm{Mat}(\Omega, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad L^\top = L.$$

Dann ist der in (0.3) definierte Hamiltonoperator H hermitesch, denn für alle $i, j \in \Omega$ gilt

$$(H^*)_{ij} = \overline{H_{ji}} = \overline{L_{ji}} = L_{ji} = L_{ij} = H_{ij},$$

wobei $\overline{L_{ji}} = L_{ji}$ wegen $L_{ji} \in \mathbb{R}$ und $L_{ji} = L_{ij}$ wegen $L^\top = L$ benutzt wurde. Also $H^* = H$.

(1.3) Exponentialadditivität und Dynamik

Da $H \in \text{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$, ist die matrixwertige Exponentialfunktion $z \mapsto e^{zH}$ wohldefiniert. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ kommutieren die Matrizen zH und wH (denn beide sind skalare Vielfache desselben Operators H), und daher gilt

$$e^{(z+w)H} = e^{zH} e^{wH} \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

Wir setzen

$$U_t^- := e^{-itH}, \quad U_t^+ := e^{itH}.$$

Da $H = H^*$, folgt $(U_t^-)^* = e^{(itH)^*} = e^{itH^*} = e^{itH} = U_t^+$ und ebenso $(U_t^+)^* = U_t^-$. Somit sind $U_t^\pm$ unitär, und die Dynamik

$$\alpha_t^-(A) = U_t^- A U_t^+$$

ist ein $*$ -Automorphismus auf $\mathcal{A}$.

(1.4) Gibbs-Operator, Normierung und Zustand

Sei ferner $\beta > 0$. Da H hermitesch ist, besitzt H reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (mit $n = |\Omega|$). Daher gilt

$$Z_\beta = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{k=1}^n e^{-\beta \lambda_k} > 0,$$

da jeder Summand $e^{-\beta \lambda_k} > 0$ und die Summe wegen $|\Omega| \geq 1$ nichtleer ist. Insbesondere ist Z_β reell und positiv, sodass Z_β^{-1} existiert. Die kanonische Gibbs-Dichtematrix und der zugehörige Zustand sind daher wohldefiniert:

$$\rho_\beta := Z_\beta^{-1} e^{-\beta H}, \quad \varphi_\beta(A) := \text{Tr}(\rho_\beta A).$$

(1.5) Form der KMS-Bedingung

Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ fordern wir die Existenz einer Funktion

$$F_{A,B} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $F_{A,B}$ ist auf dem offenen Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < \beta\}$ holomorph,
- (b) $F_{A,B}$ ist auf dem abgeschlossenen Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq \beta\}$ stetig,
- (c) für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_{A,B}(t) = \varphi_\beta(\alpha_t^-(A)B),$$

- (d) für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_{A,B}(t + i\beta) = \varphi_\beta(B\alpha_t^-(A)).$$

Dies ist die hier verwendete Form der KMS-Bedingung.

(2) Theorem

Satz (Gibbs–KMS im endlichen Matrixfall). *Sei Ω eine endliche, nichtleere Menge, sei $\mathcal{A} = \text{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$ die in (0.2) definierte C^* -Algebra, sei $L \in \text{Mat}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $L^\top = L$, und sei $\beta > 0$. Verwende die in (0.3)–(0.5) eingeführten Objekte*

$$H := H(L), \quad \alpha_t^-(A) := e^{-itH} A e^{itH}, \quad \varphi_\beta(A) := \text{Tr}(Z_\beta^{-1} e^{-\beta H} A), \quad Z_\beta := \text{Tr}(e^{-\beta H}).$$

Dann ist φ_β ein (α^-, β) -KMS-Zustand auf $\mathcal{A}$ im Sinne der in (1.5) formulierten Bedingung.

(3) Beweis

(3.1) Hermitizität und unitäre Zeitentwicklung

Aus $L^\top = L$ wurde in (1.2) bereits komponentenweise gezeigt, dass $H^* = H$. Daraus folgt, dass $U_t^\pm$ unitär sind und die Exponentialadditivität $e^{(z+w)H} = e^{zH}e^{wH}$ gilt, wie in (1.3) begründet.

(3.2) Kommutativität von ρ_β mit der Dynamik

Per Definition ist

$$\rho_\beta = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H}.$$

Sowohl $e^{-\beta H}$ als auch e^{-itH} sind Exponentialausdrücke desselben Operators H . Wegen der in (1.3) gezeigten Exponentialadditivität kommutieren sie:

$$e^{-\beta H} e^{-itH} = e^{(-\beta-it)H} = e^{(-it-\beta)H} = e^{-itH} e^{-\beta H}.$$

Also gilt $\rho_\beta U_t^- = U_t^- \rho_\beta$.

(3.3) Invarianz des Gibbs-Zustands

Für $A \in \mathcal{A}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(\alpha_t^-(A)) &= \text{Tr}(\rho_\beta U_t^- A (U_t^-)^*) \\ &= \text{Tr}(U_t^- \rho_\beta A (U_t^-)^*) \quad (\text{wegen } \rho_\beta U_t^- = U_t^- \rho_\beta) \\ &= \text{Tr}((U_t^-)^* U_t^- \rho_\beta A) \quad (\text{Zyklizität der Spur, vgl. (0.2)}) \\ &= \text{Tr}(\rho_\beta A) \quad (\text{Unitarität: } (U_t^-)^* U_t^- = \mathbf{1}) \\ &= \varphi_\beta(A). \end{aligned}$$

Also ist φ_β invariant unter α^- .

(3.4) Wahl des KMS-Kerns

Für feste $A, B \in \mathcal{A}$ definieren wir

$$F_{A,B}(z) := \text{Tr}(\rho_\beta e^{-izH} A e^{izH} B), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Da $z \mapsto e^{-izH}$ und $z \mapsto e^{izH}$ ganze (d. h. auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe) Matrixfunktionen sind und Tr eine stetige Linearform auf dem endlichdimensionalen Raum $\text{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$ ist, ist auch $F_{A,B}$ eine ganze Funktion. Insbesondere ist $F_{A,B}$ holomorph auf dem offenen Streifen $0 < \Im z < \beta$ und stetig auf seinem Abschluss.

(3.5) Untere Randbedingung

Für reelles t erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t) &= \text{Tr}(\rho_\beta e^{-itH} A e^{itH} B) \\ &= \text{Tr}(\rho_\beta \alpha_t^-(A) B) \\ &= \varphi_\beta(\alpha_t^-(A) B). \end{aligned}$$

Damit ist Bedingung (1.5)(c) erfüllt.

(3.6) Obere Randbedingung

Sei $t \in \mathbb{R}$. Wegen der Exponentialadditivität (vgl. (1.3)) gilt

$$e^{-i(t+i\beta)H} = e^{(-it+\beta)H} = e^{\beta H} e^{-itH}, \quad e^{i(t+i\beta)H} = e^{(it-\beta)H} = e^{itH} e^{-\beta H}.$$

Also folgt

$$F_{A,B}(t+i\beta) = \text{Tr}(\rho_\beta e^{\beta H} e^{-itH} A e^{itH} e^{-\beta H} B).$$

Da $\rho_\beta = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H}$, erhält man

$$\rho_\beta e^{\beta H} = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H} e^{\beta H} = Z_\beta^{-1} \mathbf{1}.$$

Somit

$$F_{A,B}(t+i\beta) = Z_\beta^{-1} \text{Tr}(e^{-itH} A e^{itH} e^{-\beta H} B).$$

Nun wenden wir die Zyklizität der Spur an ($\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$), hier mit $X = e^{-itH} A e^{itH}$ und $Y = e^{-\beta H} B$ und rotieren $e^{-\beta H} B$ nach vorne:

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t+i\beta) &= Z_\beta^{-1} \text{Tr}(e^{-\beta H} B e^{-itH} A e^{itH}) \\ &= \text{Tr}(\rho_\beta B \alpha_t^-(A)) \\ &= \varphi_\beta(B \alpha_t^-(A)). \end{aligned}$$

Damit ist Bedingung (1.5)(d) erfüllt.

(3.7) Schluss: Erfüllung der KMS-Definition

Aus den Schritten (3.3) bis (3.6) folgt:

- (i) $\beta > 0$ (Voraussetzung),
- (ii) φ_β ist invariant unter α^- (Schritt 3.3),
- (iii) für alle $A, B \in \mathcal{A}$ existiert ein Kern $F_{A,B}$, der auf dem offenen Streifen holomorph, auf dem abgeschlossenen Streifen stetig ist (Schritt 3.4)
- (iv) und die beiden Randgleichungen $F_{A,B}(t) = \varphi_\beta(\alpha_t^-(A)B)$ sowie $F_{A,B}(t+i\beta) = \varphi_\beta(B \alpha_t^-(A))$ erfüllt (Schritte 3.5–3.6).

Das ist genau die in (1.5) formulierte KMS-Bedingung. Damit ist das in Abschnitt (2) formulierte Theorem bewiesen:

$$\varphi_\beta \text{ ist ein } (\alpha^-, \beta)\text{-KMS-Zustand auf } \text{Mat}(\Omega, \mathbb{C}).$$

□

Präzisionshinweise

1. **Abstraktheit von Ω .** Der Satz gilt für jede endliche, nichtleere Menge Ω . Die Menge Ω dient ausschließlich als Indexmenge; sämtliche algebraischen Eigenschaften stammen aus der Konstruktion von $\text{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$.
2. **Minus-Orientierung.** Die Standardliteratur formuliert oft mit $\tau_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$. Hier wird bewusst die äquivalente Minus-Orientierung $\alpha_t^-(A) = e^{-itH} A e^{itH}$ verwendet.
3. **Partitionfunktion.** Die Positivität $Z_\beta > 0$ wurde in (1.4) explizit aus der Hermitizität von H und der Nichtleerheit von Ω hergeleitet.
4. **Geltungsbereich.** Der Satz ist vollständig korrekt im endlichen Matrixkontext; er ist nicht bereits der thermodynamische oder AQFT-volle Grenzfall.

Anhang A: Abbildung auf den Lean-Formalismus von REALOQS

Lesekonvention. Dieser Anhang ist rein optional. Er dokumentiert, wie die mathematischen Objekte des Haupttextes auf den aktiven Lean-Pfad in REALOQS abgebildet werden. Die Dateinamen sind relativ zu REALOQS/PillarB/AQFT/ bzw. REALOQS/PillarB/AQFT/Derived/ zu lesen.

Standardliteratur	Vorliegender Formalismus / Lean-Objekte	Lean-Modul
Endliche Observable-Algebra $B(\mathcal{H})$ bzw. $M_n(\mathbb{C})$	Endliche Matrixalgebra $\mathcal{A} = \text{Mat}(\Omega, \mathbb{C})$; Matrix- C^* -Struktur auf $\text{Mat } \Omega$	<code>BoundaryMatrixCStar.lean</code>
Hermiteischer Hamiltonoperator $H = H^*$	Komplexifizierung der reellen symmetrischen Matrix L ; Objekt <code>fullHamiltonian</code> und Hermitizität aus $L^\top = L$	<code>BoundaryMatrixFullExp.lean</code>
Exponentialabbildung e^{zH}	Banachalgebra-Exponential auf Matrizen; Objekt <code>hamExp</code> ; Additivität via <code>hamExp_add</code>	<code>BoundaryMatrixFullExp.lean</code>
Heisenberg-Dynamik $\tau_t(A) = e^{itH} A e^{-itH}$	Minus-Orientierung: <code>unitaryFromLMinus</code> , <code>unitaryFromLPlus</code> , <code>fullBoundaryDynMinus</code> und $\alpha_t^-(A) = e^{-itH} A e^{itH}$	<code>BoundaryMatrixFullExp.lean</code> ; <code>BoundaryMatrixFullDynamics.lean</code>
Gibbs-Gewicht $e^{-\beta H}$	Objekt <code>gibbsOpCoreAtBeta</code> mit $G_\beta = e^{-\beta H}$	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Partitionfunktion $Z_\beta = \text{Tr}(e^{-\beta H})$	Lean-typisiert als <code>boundaryDensityZAtBeta</code> $= \Re \text{Tr}(e^{-\beta H})$; im endlichen hermiteschen Fall die übliche reellwertige Partitionfunktion	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code> ; <code>BoundaryMatrixDensityState.lean</code>
Dichtematrix $\rho_\beta = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H}$	Objekt <code>densityMatrixCoreAtBeta</code>	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Gibbs-Zustand $\omega_\beta(A) = \text{Tr}(\rho_\beta A)$	Objekte <code>boundaryDensityStateMatAtBeta</code> und <code>boundaryDensityStateAtBeta</code>	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Analytischer KMS-Kern auf dem Streifen	Objekt <code>fullKMSKernelMinusAtBeta</code> mit $F_{A,B}(z) = \text{Tr}(\rho_\beta e^{-izH} A e^{izH} B)$	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Analytizität des Kerns	Objekt <code>fullKMSKernelMinusAtBeta_differentiable</code> ; daraus Holomorphie auf dem offenen Streifen und Stetigkeit auf dem Abschluss	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Untere Randgleichung	Objekt <code>fullKMSKernelMinusAtBeta_re_boundary</code> mit $F_{A,B}(t) = \varphi_\beta(\alpha_t^-(A)B)$	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Obere Randgleichung	Objekt <code>fullKMSKernelMinusAtBeta_top_boundary</code> mit $F_{A,B}(t + i\beta) = \varphi_\beta(B\alpha_t^-(A))$	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Invarianz des Gibbs-Zustands	Objekt <code>boundaryDensityStateMatAtBeta_invariant_fullDynMinus</code>	<code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>
Zusammenbau zum KMS-Satz	Repo-Form <code>IsKMS</code> ; Objekte <code>boundaryDensityState_isKMS_minus_atBeta</code> und als Bundle <code>boundaryFullKMSMinusAtBeta</code>	<code>KMS.lean</code> ; <code>BoundaryMatrixFullKMSFromL.lean</code>

Korollar. *Unter denselben Voraussetzungen existiert im Lean-Repo der gebündelte Zeuge*

`boundaryFullKMSMinusAtBeta`

als C^ -KMS-Zustand auf der Minus-Branch-Dynamik. Dieser Bundle-Satz ist keine zusätzliche Mathematik, sondern der formale Zusammenschluss des im Haupttext bewiesenen Gibbs–KMS-Satzes mit dem zugehörigen Dynamik- und Zustandsobjekt.*

Literatur

- [1] R. Kubo, *Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems*, Journal of the Physical Society of Japan **12** (1957), 570–586. DOI: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.12.570>.
- [2] P. C. Martin and J. Schwinger, *Theory of Many-Particle Systems. I*, Physical Review **115** (1959), 1342–1373. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.1342>.
- [3] R. Haag, N. M. Hugenholtz und M. Winnink, *On the equilibrium states in quantum statistical mechanics*, Communications in Mathematical Physics **5** (1967), 215–236. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01646342>.

- [4] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03444-6>.
- [5] J. Dereziński and C.-A. Pillet, *KMS states*, online survey note, 3 pp.; the hosted manuscript shows no printed year. URL: <https://pillet.univ-tln.fr/data/pdf/KMS-states.pdf>.