

Definition des IDEAL/REAL-Graph im Sinne prä-geometrischer offener Quantensysteme OQG auf SG/ST

antaris, ChatGPT5.2

1. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

1 IDEAL-Trunk (prä-geometrisch, SG/ST als p.c.f.-Approximanten)	2
1.1 Geltungsbereich, epistemischer Status und Red-Team-Resilienz (normativ)	2
1.2 Pfeiler A: Scope, Claim-Leiter, Bridge-Claims und Nicht-Claims (normativ) . . .	4
1.3 Alphabet, Wörter, Notation	5
1.4 Symbolische Vertexmengen und constant-tail Identifikation	6
1.5 Kanonische Inklusion (Fixpunkt-Padding)	6
1.6 Ontisches Postulat $L_{\max} = \infty$ und kanonische Trunk-Approximation	7
1.7 Deterministische Umwelt-Mikrostruktur und konditionierte Trajektorien (normativ)	9
1.8 Prä-geometrische Lokalität und effektive Rand-Nichtlokalität (normativ)	16
1.9 Warum in Pfeiler A keine Tensorfaktorzerlegung postuliert wird (normativ) . . .	17
1.10 Level- L -Kanten und Loop-Ausschluss	17
1.11 Randmenge B_0 (Corner-Vertices im Trunk)	18
1.12 Subsystemränder B_w (Zellränder) im Trunk	18
1.13 IDEAL-Hinweis zur Energierenormierung	19
2 REAL-Graph als prä-OQS (vNext.3-canonical)	19
2.1 Numerische Kanonisierung (float64-deterministisch)	19
2.2 Parameterreduktion (kanonisch)	29
2.3 REAL-Zustand (Leitwerte), Laplacian, Energie	29
2.4 prä-OQS-Hilbertraum aus Dirichlet-Form; intrinsischer System/Umwelt-Split (Rand vs. Zellinneres)	29
2.5 prä-OQS-Channel auf den Rand (CPTP, intrinsischer System/Umwelt-Split) . .	30
2.6 Vollständiger OQS-Zeitschritt (intrinsisch) + optionale Zustandsdiagnostik . . .	31
2.7 Globales DtN/Kron auf B_0 und Randenergie-Summe (kein Freeze)	32
2.8 Skalierbarkeit, Sparse-Formate und Komplexität (Engineering-Hinweise; nicht-normativ)	34
3 Widerstandsmetrik (kanonisch: effektiver Widerstand aus der Dirichlet-Form)	34
3.1 Normative Definition (implementierbar): Konnektivität + Grounding + Symmetrisierung + SPD-Regularisierung + Solve	34
3.2 Visualisierungs-Gauges (nicht-normativ): MDS und harmonische Einbettung . . .	36
3.3 Akzeptanzkriterien & Diagnostik zur Widerstandsmetrik (normativ: Report-Felder; Gates als Compliance-Checks)	36

4	Driver-B (prä-geometrischer Feedback-Treiber; rand-inzident inklusive)	39
4.1	Adressmengen und äquivalente LCP-Maß-Zuordnung von Kanten	39
4.2	Zellränder B_w , Zell-Vertexmengen V_w	40
4.3	Äquivarianz- und Tie-Diagnostik (Compliance-Checks)	40
4.4	Lokaler loopy-Laplacian (physikalisch bevorzugt: principal submatrix + Shunts)	41
4.5	Lokales DtN/Kron auf B_w (deterministisch; total definiert)	41
4.6	IDEAL als Normierungsreferenz (diagnostisch; nicht im Feedback)	42
4.7	Bidirektionale Backreaction als Coarse-Graining und Pullback (Terminologie, normativ)	42
4.8	Einziges Mismatch-Funktional (kanonisch, OQS-first): Kanaldivergenz aus global- vs-lokal DtN	43
4.9	Kappa-Sättigung und Override (kanonisch, OQS-first)	45
4.10	Zellverteilung p und Zentrierung $\tilde{p}$ (antwort-/energie-/kanalbasiert; OQS-first) .	47
4.11	Update-Exponent Δ_n (rand-inzident inklusive)	48
4.12	Leitwert-Update (alle Kanten) + Randenergie-Erhaltung (kein Freeze)	48
5	Literatur (Primärquellen)	49
A	Symbolverzeichnis (tabellarisch)	52
A.1	Abschnitt 1: IDEAL-Trunk	52
A.2	Abschnitt 2: REAL-Graph als prä-OQS	56
A.3	Abschnitt 3: Widerstandsmetrik	64
A.4	Abschnitt 4: Driver-B (OQS-Feedback, Mismatch, Rückkopplung, Update)	68
B	Kanonische Modulstruktur und Symbol→Modul-Zuordnung (normativ)	75
B.1	Kanonische Modulstruktur (<code>realgraph_oqs</code>)	75
B.2	Normative Referenzdatei (JSON) und Hash	75
B.3	Symbol→Modul-Tabelle (druckbare Darstellung der JSON-Referenz)	75

1 IDEAL-Trunk (prä-geometrisch, SG/ST als p.c.f.-Approximanten)

1.1 Geltungsbereich, epistemischer Status und Red-Team-Resilienz (normativ)

Definition 1.1 (Anspruchsklasse und Nicht-Ansprüche). Diese Spezifikation definiert eine deterministische Abbildung

$$(\text{IDEAL}_\infty, \text{Support } B, \text{Policy}) \longmapsto (\text{REAL-Approximant auf } K_{L_{\max}}, \text{Response-/Kanal-Daten, Update})$$

mit dem Primärziel, aus einem statischen, prä-geometrischen Substrat (**IDEAL**) eine nicht-triviale, selbstorganisierende Dynamik (**REAL**) abzuleiten (“open quantum dynamics first”). *Nicht* beansprucht wird in Pfeiler A: (i) eine vollständige Beschreibung des Standardmodells oder makroskopischer Raumzeit, (ii) eine Reproduktion von Bell/CHSH-Verletzungen, (iii) mathematisch bewiesene Grenzwertsätze im Limes $L_{\max} \rightarrow \infty$. Alle physikalischen Deutungen, die über die hier definierten Response-/Kanal-Objekte hinausgehen, sind **bedingt** durch spätere Pfeiler (z. B. Many-Body-Struktur, Observablenalgebren, Kalibrierung) und durch das in §2.2 fixierte Verifikationsprotokoll.

Bemerkung 1.1 (Endliche Supports und Darstellungsebene). Empirisch zugängliche Systeme werden in dieser Spezifikation als *endliche Supports* $B \subset V_\infty$ modelliert. Die numerische Realisierung erfordert stets eine endliche Darstellung ($L_{\max} < \infty$) und endliche Maschinenpräzision. Die

Stabilisierungskonstanten $\varepsilon_{\text{mach}}, \varepsilon_{\text{floor}}$ und daraus abgeleitete Jitter-Terme sind daher *numerische* Regularisierungen (Tikhonov/Jitter), keine physikalischen Modellparameter. Physikalische Schlussfolgerungen dürfen nur aus Größen gezogen werden, die unter zulässigen Darstellungstransformationen (z. B. Präzisionswechsel, alternative BLAS-Backends) *robust* sind; dies wird über Determinismus-Levels und Akzeptanzkriterien operationalisiert.

Definition 1.2 (Determinismus-Level und Repräsentationsinvarianz). Ein Run ist

- **D0 (bit-identisch)** genau dann, wenn ENV_LOCK aktiv ist (Toolchain/Container/BLAS/LAPACK/Threads fest gepinnt) und alle normativen Policies (Summationsordnung, Solve-Policy, Jitter, Basisordnung) erfüllt sind.
- **D1 (toleranz-invariant)** wenn bei variierender, aber normkonformer Toolchain die Ausgaben innerhalb der in §2.2 festgelegten Toleranzen übereinstimmen.

Repräsentationsinvarianz im Sinne dieser Spezifikation bedeutet: physikalisch interpretierte Observablen sind mindestens D1-stabil; D0 ist ein Engineering-Gate für Regressionstests.

Proposition 1.1 (Äquivarianz und Symmetrieerhaltung). *Sei G ein Graph mit Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$ und sei der Update-Operator $c \mapsto c'$ äquivariant unter $\text{Aut}(G)$ (d. h. $c \circ \pi^{-1} \mapsto c' \circ \pi^{-1}$ für alle $\pi \in \text{Aut}(G)$). Ist der Startzustand c_0 invariant unter einer Untergruppe $H \leq \text{Aut}(G)$ und ist der Support/Trunk/Policy ebenfalls H -invariant, dann bleibt c_n für alle n H -invariant.*

Bemerkung 1.2. Dies fixiert eine Red-Team-Schlüsselstelle: In *exakter* Symmetrielage bricht ein deterministischer, äquivariant definierter Driver die Symmetrie nicht “von selbst”. Symmetriebrechung in Pfeiler A entsteht daher (i) durch die **Systemwahl** (endlicher Support B , insbesondere Innen-Support), (ii) durch Trunk-Cut-offs ($K_{L_{\text{max}}}$) und (iii) durch normativ festgelegte Tie-Breaker (lexikographische Ordnung, Ground-Knoten). Ein “Kick ohne Seed” ist damit nicht als “Spontanbruch aus perfekter Symmetrie” zu verstehen, sondern als *deterministische* Konsequenz der Unvollständigkeit eines endlichen Supports relativ zum ontischen Limes.

Bemerkung 1.3 (Bell/CHSH und Tensorfaktorisierung). Die in Pfeiler A verwendete Hilbertraumstruktur $\mathcal{H}_\infty = \ell^2(V_\infty) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$ ist ein *Support-/Vertex-Sektor*. Sie trägt eine kanonische Direktsummenzerlegung nach Supports, aber *keine* postulierte Many-Body-Tensorproduktstruktur $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Daher erhebt Pfeiler A **keinen** Anspruch, Bell/CHSH-Experimente zu modellieren oder Verschränkung zu reproduzieren. Effektive Nichtlokalität der Randantwort (DtN/Kron) ist in diesem Pfeiler ein *Response-Effekt* des Ausspurens; daraus folgt *nicht* automatisch eine Verletzung lokaler Realismus-Ungleichungen. Eine Bell-relevante Erweiterung erfordert zusätzliche Struktur (z. B. Many-Body/Fock-Räume oder algebraische Lokalität über kommutierende Subalgebren) und wird als späterer Pfeiler behandelt.

Definition 1.3 (Driver-Policy als kontrollierte Modellklasse). Driver-B und alle Nichtlinearitäten (z. B. Sättigung tanh, Normalisierungen, Gewichtungen α_k) sind in Pfeiler A als **Policy** zu verstehen: Sie definieren eine *Modellvariante* innerhalb einer normativ eingeschränkten Klasse zulässiger Update-Regeln (bounded, 1-Lipschitz, deterministisch, logbar). *Universelle* physikalische Aussagen werden daraus nicht abgeleitet; zulässig ist eine *Strukturaussage*: dass deterministische Backreaction aus einem statischen IDEAL-Start nichttriviale Dynamik erzeugen kann. Jede Abweichung von den Default-Policies ist als neue Modellvariante mit Hash, vollständigem Report und Benchmark-Protokoll zu deklarieren (kein implizites “Tuning”).

Literaturkontext. Die hier verwendeten SG/ST-Approximanten werden als graphische Approximationen p.c.f. selbstähnlicher Mengen im Sinne der Fraktalanalyse verstanden.[1, 2]

Bemerkung 1.4 (Warum SG/ST als IDEAL-Substrat (Startpunkt, nicht Naturbehauptung)). SG (Sierpinski-Gasket) und ST (Sierpinski-Tetraeder) werden hier nicht als Abbild der Natur postuliert, sondern als *minimaler, mathematisch kontrollierbarer* ontischer Träger gewählt, der (i) eine kanonische Folge endlicher Approximanten K_L besitzt, (ii) eine wohldefinierte Dirichlet-Form und damit Laplace-Operatoren auf jedem Level erlaubt, und (iii) ein strukturell klares Coarse-Graining (Selbstähnlichkeit/RG-Skalierung der Energie) unterstützt. Diese Eigenschaften ermöglichen eine präzise, deterministische Spezifikation ohne impliziten Kontinuumsinput. Andere ontische Träger (andere p.c.f.-Fraktale, nicht-selbstähnliche Graph-Familien, zufällige Netze) sind in dieser Spezifikation nicht ausgeschlossen, würden aber eine *neue* IDEAL-Klasse und damit neue Konvergenz-/Vergleichsprotokolle erfordern.

Bemerkung 1.5 (Zentrale Fragestellung von Pfeiler A: intrinsische Offenheit aus Support-Schnitt). Pfeiler A untersucht *nicht* primär, „was“ emergiert (Raumzeit/Teilchen), sondern ob überhaupt eine nichttriviale *offene* Dynamik prä-geometrisch, deterministisch und ohne exogene Umweltannahmen entsteht. Konkret: Für einen endlichen Support $B \subset V_\infty$ liefert das Ausspüren des Komplements (via DtN/Kron/Schur-Komplement) eine effektive Randantwort und daraus abgeleitete CPTP-Kanäle. Das *Mismatch* misst die Einbettungsabhängigkeit derselben Randmenge (§4.8). Die Forschungsfrage ist operational:

1. Ist $\text{Mismatch}(n, w)$ im symmetrischen IDEAL-Start für nichttriviale Innen-Supports generisch *nicht* null („Kick ohne Seed“ als deterministische Subsystemkonsequenz)?
2. Bleibt diese Nichttrivialität unter Levelverfeinerung $L_{\max} \uparrow \infty$ stabil im Sinne der Hypothesen H1–H3 (Def. 2.1) und der Akzeptanzkriterien (Def. 2.3)?

Erst wenn diese Fragen positiv beantwortet sind, ist es sinnvoll, spätere Pfeiler (Many-Body, Observablen, Kontinuumsbrücke) aufzusetzen.

1.2 Pfeiler A: Scope, Claim-Leiter, Bridge-Claims und Nicht-Claims (normativ)

Definition 1.4 (Claim-Leiter von Pfeiler A (A0–A4)). Pfeiler A fixiert einen *prä-geometrischen* und *reproduzierbaren* Konstruktions- und Testrahmen. Aussagen über das Modell werden in folgende Claim-Stufen gegliedert:

- A0 Ontik und Input-Sperre.** Ontisch postuliert wird ausschließlich der unendliche IDEAL-Graph G_∞ als kombinatorischer Träger ohne Kontinuumsinput. Alle endlichen Trunks/Approximanten sind Darstellungs- bzw. Rechenobjekte.
- A1 Kanonische endliche Rechenobjekte.** Für gegebenes $L_{\max}$, Support B und Policy-Hash sind Trunk, Patch-Ordnung, deterministische Regularisierungen sowie alle linearen Operatoren (insb. L_n , DtN/Kron, Widerstandsmetrik) *total definiert* und *implementierbar* (Def. 1.7, Def. 2.8, Def. 2.9).
- A2 Zwei effektive Randantworten und zugehörige Kanäle.** Für jede Zelle w werden eine lokale und eine globale Randantwort $\Lambda_{n,w}^{\text{loc}}$ bzw. $\Lambda_{n,w}^{\text{glob}}$ konstruiert; daraus folgen deterministische, CPTP-konforme OQS-Kanäle $\Phi_{n,w}^{\text{loc}}$ und $\Phi_{n,w}^{\text{glob}}$ gemäß der OQS-first-Spezifikation (§4.8).
- A3 Mismatch als intrinsische Einbettungsdivergenz.** Der Mismatch $\text{Mismatch}(n, w)$ ist normativ definiert als Umegaki-QRE der regularisierten Choi-Zustände (mit festgelegter Regularisierung/Matrixfunktion-Policy). Es gilt: $\text{Mismatch}(n, w) \geq 0$ und $\text{Mismatch}(n, w) = 0$ genau dann, wenn die regularisierten Choi-Zustände übereinstimmen (§4.8).

A4 Backreaction-Update als deterministischer Feedback-Schritt. Der Driver-B induziert einen deterministischen Update-Schritt $c_n \mapsto c_{n+1}$ und damit $L_n \mapsto L_{n+1}$, gesteuert über $\kappa_n(w)$ aus $\text{Mismatch}(n, w)$ (OQS-first). Stabilitäts-, Skalierungs- und Grenzwertbehauptungen werden in Pfeiler A *nicht bewiesen*; sie sind ausschließlich als Hypothesen H1–H3 (Def. 2.1) zulässig und dürfen *nur* in Verbindung mit dem Akzeptanz- und Sensitivitätsprotokoll (Def. 2.3, Def. 2.6) als „empirisch gestützt“ klassifiziert werden.

Definition 1.5 (Bridge-Claims (BC) jenseits von Pfeiler A). Eine Aussage ist ein *Bridge-Claim*, wenn sie auf Pfeiler-A-Objekten/Observablen (A0–A4) und ggf. auf *empirisch gestützten Regularitäten* gemäß Def. 2.3 und Def. 2.6 aufbaut, aber *zusätzliche Struktur* voraussetzt oder einführt (z. B. Kontinuumsidentifikation, Mess-Settings, Many-Body-Sektoren, zusätzliche Freiheitsgrade, neue Constraints/Prinzipien). Bridge-Claims sind in Pfeiler A *zulässig als Hypothesen/Programmschritte*, dürfen jedoch nicht als *Konsequenzen* aus Pfeiler A ausgegeben werden; ihre Stützung erfordert die jeweilige Zusatzstruktur und separate Validierung in späteren Pfeilern.

Bemerkung 1.6 (Nicht-Claims von Pfeiler A (explizit ausgeschlossen)). Pfeiler A erhebt *keine* der folgenden Ansprüche *als Pfeiler-A-Resultate*. Solche Aussagen sind als Bridge-Claims (Def. 1.5) zu führen; sie dürfen auf Pfeiler A aufbauen, gelten jedoch erst nach Einführung der jeweils notwendigen Zusatzstruktur und deren Validierung in späteren Pfeilern als gestützt:

1. Kontinuumsphysikalische Identifikation (Lorentz-/Poincaré-Invarianz, Lichtkegel, Mannigfaltigkeit) oder physikalische Interpretation der Widerstandsmetrik jenseits ihrer Rolle als *diagnostisches* Objekt.
2. Existenz von Teilchen/Many-Body-Strukturen, Fock-Räumen, Tensorfaktorisierungen $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, oder Aussagen über Verschränkung/Bell/CHSH. Diese erfordern zusätzliche Struktur (Subsystem-Algebren, Messsettings, Mehrteilchen-Sektor).
3. Physikalisches Fitting (Standardmodellparameter, kosmologische Parameter) oder die Behauptung, das Modell beschreibe *unser* Universum.
4. Mathematische Grenzwertsätze für den nichtlinearen REAL-Flow; Grenzwertinterpretationen sind nur über die normativen Protokolle (Akzeptanz/Sensitivität/Forensik) zulässig.

Bemerkung 1.7 (Zulässige Interpretation auf Pfeiler-A-Niveau). Pfeiler A ist als reproduzierbares *numerisches Experiment* zu lesen, das die Möglichkeit einer *intrinsischen Offenheit* (Einbettungsabhängigkeit von Subsystemantworten) in einem prä-geometrischen Trunk testet. Weitergehende physikalische Deutungen sind als Bridge-Claims (Def. 1.5) zu markieren und dürfen erst nach Bestehen der Pfeiler-A-Gates sowie nach Einführung und Validierung der benötigten Zusatzstruktur in späteren Pfeilern als gestützt gelten.

Bemerkung 1.8 (Spezifikationscharakter und Anschluss an etablierte QIT/OQS). Das Dokument ist bewusst als *Spezifikation* für ein numerisch reproduzierbares Experiment formuliert. Der Anschluss an Standard-QIT/OQS erfolgt über CPTP-Kanäle, Choi-Zustände und relative Entropie; eine Tensorproduktstruktur wird in Pfeiler A nicht vorausgesetzt.

1.3 Alphabet, Wörter, Notation

Fixiere einen Typ $\bullet \in \{\text{SG}, \text{ST}\}$ und setze

$$S_\bullet := \begin{cases} \{0, 1, 2\}, & \bullet = \text{SG}, \\ \{0, 1, 2, 3\}, & \bullet = \text{ST}. \end{cases}$$

Für $L \in \mathbb{N}_0$ sei $S_\bullet^L$ die Menge aller Wörter $w = (w_1, \dots, w_L)$ der Länge L über $S_\bullet$, mit $S_\bullet^0 = \{\emptyset\}$. Für ein Symbol $a \in S_\bullet$ und $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichne a^m das Wort $(a, \dots, a)$ der Länge m (bei $m = 0$ das leere Wort). Konkatenation von Wörtern schreiben wir durch Nebeneinanderstellen.

1.4 Symbolische Vertexmengen und constant-tail Identifikation

Für jedes Level $L \geq 0$ definiere die Rohmenge

$$\widehat{V}_L := S_\bullet^L \times S_\bullet \quad \text{mit Elementen } (w, i).$$

Constant-tail Erzeugerrelation. Definiere für jedes $L \geq 1$ die kleinste Äquivalenzrelation $\sim_L$ auf $\widehat{V}_L$, die für alle $r \in \{0, 1, \dots, L-1\}$, alle Präfixe $u \in S_\bullet^r$ und alle $i \neq j \in S_\bullet$ die Identifikation erzwingt:

$$(u i j^{L-r-1}, j) \sim_L (u j i^{L-r-1}, i).$$

Für $L = 0$ setze $\sim_0$ als Gleichheit auf $\widehat{V}_0 = \{\emptyset\} \times S_\bullet$.

Quotienten-Vertices. Setze

$$V_L^\bullet := \widehat{V}_L / \sim_L, \quad [(w, i)]_{\sim_L} \in V_L^\bullet.$$

1.5 Kanonische Inklusion (Fixpunkt-Padding)

Für $0 \leq \ell \leq L$ definiere

$$\iota_{\ell \rightarrow L} : V_\ell^\bullet \rightarrow V_L^\bullet, \quad \iota_{\ell \rightarrow L}([(w, i)]_{\sim_\ell}) := [(w i^{L-\ell}, i)]_{\sim_L}.$$

(Die Wohldefiniertheit folgt, da die Erzeugerrelationen durch Anhängen eines konstanten Tails wieder Erzeugerrelationen auf Level L induzieren.)

Proposition 1.2 (Wohldefiniertheit und Verträglichkeit des Fixpunkt-Paddings). *Für $0 \leq \ell \leq L$ ist die Abbildung $\iota_{\ell \rightarrow L} : V_\ell^\bullet \rightarrow V_L^\bullet$ wohldefiniert, d. h. sie hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten einer Äquivalenzklasse in $V_\ell^\bullet$ ab. Zudem ist sie verträglich mit der Erzeugerrelation: Aus $(w, i) \sim_\ell (w', i')$ folgt*

$$(w i^{L-\ell}, i) \sim_L (w' i'^{L-\ell}, i').$$

Beweis. Die Relation $\sim_\ell$ ist die kleinste Äquivalenzrelation, die durch die Constant-tail-Erzeuger

$$(u i j^{\ell-r-1}, j) \sim_\ell (u j i^{\ell-r-1}, i)$$

erzeugt wird. Hängt man an beide Seiten denselben konstanten Tail der Form $j^{L-\ell}$ bzw. $i^{L-\ell}$ an, erhält man wieder einen Erzeuger der Level- L -Relation $\sim_L$ (gleicher Präfix u , gleiche vertauschte Symbole $i \neq j$, nun Länge L). Da $\sim_L$ transitiv ist, folgt die Behauptung für alle durch Erzeugerketten verbundenen Paare, also für alle $(w, i) \sim_\ell (w', i')$. $\square$

Proposition 1.3 (Injektivität der kanonischen Inklusion). *Für $0 \leq \ell \leq L$ ist die kanonische Inklusion (Fixpunkt-Padding) $\iota_{\ell \rightarrow L} : V_\ell^\bullet \rightarrow V_L^\bullet$ injektiv. Insbesondere können die in § 1.6 verwendeten Pfeile $V_\ell^\bullet \hookrightarrow V_L^\bullet$ als Einbettungen verstanden werden.*

Beweis. Seien $x = [(w, i)]_{\sim_\ell}$ und $y = [(w', i')]_{\sim_\ell}$ mit $\iota_{\ell \rightarrow L}(x) = \iota_{\ell \rightarrow L}(y)$. Dann gilt in der Rohmenge $\widehat{V}_L$ die Äquivalenz

$$(w i^{L-\ell}, i) \sim_L (w' i'^{L-\ell}, i').$$

Betrachte nun eine Erzeugerketten-Darstellung dieser Äquivalenz in $\widehat{V}_L$. Die beiden Endpunkte besitzen die Eigenschaft

($\star$) die letzten $L - \ell$ Symbole des Wortes sind konstant und gleich dem Label.

Wir zeigen zunächst, dass $(\star)$ entlang jeder zulässigen Erzeugerrelation in $\sim_L$ erhalten bleibt, sobald sie einmal gilt: Eine einzelne Erzeugerrelation hat die Form

$$(u a b^{L-r-1}, b) \sim_L (u b a^{L-r-1}, a) \quad \text{mit } a \neq b.$$

Wenn $(\star)$ für $(u a b^{L-r-1}, b)$ gilt, dann ist $r \leq \ell - 1$. Denn für $r \geq \ell$ wäre die Position $r + 1$ bereits im konstanten Tail, also $a = b$, im Widerspruch zu $a \neq b$. Für $r \leq \ell - 1$ sind aber in beiden Ausdrücken die letzten $L - \ell$ Symbole konstant (entweder b bzw. a) und stimmen jeweils mit dem Label überein; also bleibt $(\star)$ auch nach dem Erzeugerschritt gültig.

Damit besitzen *alle* Zwischenpunkte der Erzeugerkette Eigenschaft $(\star)$ und alle verwendeten Erzeuger haben Indizes $r \leq \ell - 1$. Wir definieren nun die Trunkierungsabbildung auf dieser Menge durch

$$\tau : \widehat{V}_L \rightarrow \widehat{V}_\ell, \quad \tau((v_1 \dots v_L, a)) := (v_1 \dots v_\ell, a).$$

Für einen Erzeuger mit $r \leq \ell - 1$ gilt unmittelbar

$$\tau(u a b^{L-r-1}, b) = (u a b^{\ell-r-1}, b), \quad \tau(u b a^{L-r-1}, a) = (u b a^{\ell-r-1}, a),$$

also ist die Trunkierung eines Level- L -Erzeugers (mit $r \leq \ell - 1$) genau ein Level- ℓ -Erzeuger der Relation $\sim_\ell$. Durch Trunkierung der gesamten Erzeugerkette folgt daher

$$(w, i) \sim_\ell (w', i').$$

Damit sind $x = y$ in $V_\ell^\bullet$ und $\iota_{\ell \rightarrow L}$ ist injektiv. □

1.6 Ontisches Postulat $L_{\max} = \infty$ und kanonische Trunk-Approximation

Ontischer Grenzgraph (induktiver Limes). Für jedes $L \in \mathbb{N}_0$ seien $V_L^\bullet$ und $E_L^\bullet$ wie oben definiert. Die kanonischen Inklusionen (Fixpunkt-Padding) induzieren Einbettungen $V_L^\bullet \hookrightarrow V_{L'}^\bullet$ und $E_L^\bullet \hookrightarrow E_{L'}^\bullet$ für $L' \geq L$ (vgl. Prop. 1.3). Wir definieren den (zählbaren) induktiven Limes

$$V_\infty^\bullet := \varinjlim_{L \rightarrow \infty} V_L^\bullet, \quad E_\infty^\bullet := \varinjlim_{L \rightarrow \infty} E_L^\bullet,$$

und den unendlichen IDEAL-Graphen $G_\infty^\bullet := (V_\infty^\bullet, E_\infty^\bullet)$.

Ontisches Postulat (einziger ontischer Träger). Ontisch ist ausschließlich der unendliche IDEAL-Graph $G_\infty^\bullet$ als kombinatorisches Objekt. Alle endlichen $L_{\max}$ sind *Darstellungslevels* (Trunk-Cut-offs) für deterministische Rechnungen/Exporte und sind *nicht* ontisch.

Globale Hilbertraumstruktur (kanonisch fixiert). Fixiere die interne Dimensionszahl $d_p \in \mathbb{N}$ (“interne Freiheitsgrade pro Knoten”). Wir fixieren als *einzigen* globalen Zustandsraum (Single-Particle/Vertex-Sektor)

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} := \ell^2(V_\infty^\bullet) \otimes \mathbb{C}^{d_p}.$$

Da $V_\infty^\bullet$ zählbar ist, ist $\ell^2(V_\infty^\bullet)$ separabel und damit $\mathcal{H}_{\text{tot}}$ separabel und unendlichdimensional. Für jede endliche Knotenmenge $S \subset V_\infty^\bullet$ setzen wir

$$\mathcal{H}_S := \ell^2(S) \otimes \mathbb{C}^{d_p} \subset \mathcal{H}_{\text{tot}}, \quad P_S : \mathcal{H}_{\text{tot}} \rightarrow \mathcal{H}_S \text{ den orthogonalen Projektor.}$$

Bemerkung: In Pfeiler A wird **keine** Tensorfaktorzerlegung $\mathcal{H}_{\text{tot}} \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ über Knoten postuliert. System/Umwelt werden hier ausschließlich durch *Knotenmengen* und Projektoren P_S sowie durch explizit definierte CPTP-Reduktionskanäle (z. B. Φ_S) modelliert.

Kanonische Trunk-Approximation (welcher Teil von IDEAL wird approximiert).

Für ein Rechenlevel $L \in \mathbb{N}_0$ sei

$$K_L := \iota_L(V_L^\bullet) \subset V_\infty^\bullet$$

das kanonisch eingebettete Level- L -Vertexset (voller Trunk; keine Patch-Auswahl). Die *Arbeits-Hilberträume* sind dann eindeutig

$$\mathcal{H}_L := \mathcal{H}_{K_L} = \ell^2(K_L) \otimes \mathbb{C}^{d_p}.$$

Ein “Approximant mit Level $L_{\max}$ ” bedeutet in dieser Spezifikation:

Explizit dargestellt werden genau die Freiheitsgrade auf $K_{L_{\max}}$ (voller Level-Trunk).

Cut-off als Coarse-Graining (Ausspuren tiefer Level). Mit $\bar{K}_L := V_\infty^\bullet \setminus K_L$ ist

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_{K_L} \oplus \mathcal{H}_{\bar{K}_L}.$$

Das Ersetzen des ontischen Systems durch die explizite Darstellung auf K_L ist per Definition ein *Coarse-Graining*: die (ontisch vorhandenen) Freiheitsgrade auf $\bar{K}_L$ sind in einer endlichen Rechnung *ausgespart* (nicht dargestellt).

Auf Operatorniveau wird dieses Ausspuren idealisiert durch die Dirichlet-Form (bzw. den zugehörigen Generator) des (gewichteten) Graphen. Sei $\mathcal{E}_n$ die Dirichlet-Form des (zeitabhängigen) gewichteten Graphen (Leitwerte c_n ; vgl. unten). Für Randdaten $u_{K_L} \in \mathbb{C}^{K_L}$ sei $\tilde{u}$ die harmonische Fortsetzung als Energie-Minimierer

$$\tilde{u} := \arg \min \left\{ \mathcal{E}_n(u_{K_L} \oplus v_{\bar{K}_L}, u_{K_L} \oplus v_{\bar{K}_L}) : v_{\bar{K}_L} : \bar{K}_L \rightarrow \mathbb{C} \right\}.$$

Dann definiert $\mathcal{E}_n^{(L)}(u_{K_L}, u_{K_L}) := \mathcal{E}_n(\tilde{u}, \tilde{u})$ eine effektive Dirichlet-Form auf K_L und induziert einen effektiven (ontischen) Generator $L_{n,\text{eff}}^{(L)}$ auf K_L (“Self-Energy” des ausgesparten Tails).

Numerische Realisierung in Pfeiler A. Pfeiler A arbeitet deterministisch auf einem endlichen Trunk $K_{L_{\max}}$ und benutzt als *numerische* Näherung

$$L_{n,\text{eff}}^{(L_{\max})} \approx L_n^{(L_{\max})},$$

wobei $L_n^{(L_{\max})}$ die im Dokument definierte (gewichtete) Trunk-Laplacian aus den Leitwerten c_n auf $E_{L_{\max}}^\bullet$ ist (inkl. deterministischer Regularisierung/Jitter wie spezifiziert). Die Konvergenzfrage $L_{n,\text{eff}}^{(L)} \rightarrow L_{n,\text{eff}}^{(\infty)}$ wird in der Validierungs-/Kalibrier-Suite empirisch über L -Runs adressiert.

Systemwahl: Rand/Ränder B und intrinsischer Split. Für jede endliche Systemmenge $B \subseteq K_{L_{\max}}$ setzen wir

$$\mathcal{H}_S := \mathcal{H}_B, \quad \mathcal{H}_E := \mathcal{H}_{K_{L_{\max}} \setminus B}, \quad P_B : \mathcal{H}_{L_{\max}} \rightarrow \mathcal{H}_S.$$

Der Split $K_{L_{\max}} = B \sqcup (K_{L_{\max}} \setminus B)$ implementiert den von innen heraus gebildeten Umweltbegriff: *innere Freiheitsgrade* (Zellinneres, Trunk-Inneres) liegen in $K_{L_{\max}} \setminus B$ und werden bei Randantworten ausgespart.

Konsequenz: B_0 vs. innerer Rand B_{innen} .

- **Globaler Rand $B = B_0$:** Die Umwelt besteht aus (i) den intrinsischen Freiheitsgraden $K_{L_{\max}} \setminus B_0$ innerhalb des Trunks und (ii) dem ontisch ausgesparten Tail $\bar{K}_{L_{\max}}$. Damit ist die globale Randantwort auf B_0 eine Antwort der “inneren” Freiheitsgrade.
- **Innerer Rand $B = B_{\text{innen}} \subset K_{L_{\max}}$:** Die Umwelt ist das gesamte Komplement $K_{L_{\max}} \setminus B_{\text{innen}}$ im expliziten Trunk *plus* der ontisch ausgesparten Tail $\bar{K}_{L_{\max}}$. Da $K_{L_{\max}} \setminus B_{\text{innen}}$ typischerweise sowohl Freiheitsgrade “auf der Seite zum globalen Rand B_0 ” als auch “auf der Seite in den Tieftail” enthält, werden im inneren-Rand-Fall *innere und äußere* Freiheitsgrade (relativ zu B_{innen}) ausgespart.

Randkanal (systematisches Ausspuren als CPTP-Map). Als kanonische Reduktion auf ein System B verwenden wir den im Dokument spezifizierten CPTP-Kanal

$$\Phi_B(\rho) := P_B \rho P_B + \text{Tr}((I - P_B)\rho) \sigma_B, \quad \sigma_B := \frac{P_B}{\text{Tr}(P_B)}.$$

Damit ist der System-/Umwelt-Schnitt in Pfeiler A vollständig deterministisch und eindeutig fixiert.

Bemerkung (physikalische Interpretation, normativ). In Pfeiler A wird *keine* Tensorfaktorzerlegung $\mathcal{H}_{\text{tot}} \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ postuliert. Das “Ausspuren” der Umwelt wird stattdessen ausschließlich über *Supports* $B \subset V$, Projektoren P_B und den CPTP-Randkanal Φ_B (sowie DtN/Kron als Schur-Komplement in Solve-Semantik) implementiert. Dies ist eine deterministische *supportbasierte* Reduktion/bedingte Erwartung und *kein* Fine-Graining im Sinne einer Rekonstruktion ausgespurter Freiheitsgrade.

Empirische Systeme als Approximanten und Support-Konvention (normativ). Empirisch zugängliche physikalische Systeme werden in dieser Spezifikation stets als *endliche Supports* des ontischen Grenzgraphs $G_\infty^\bullet$ modelliert. Der *Support* eines Systems ist eine endliche Vertexmenge $B \subset V_\infty^\bullet$; der zugehörige Zustandsraum ist $\mathcal{H}_B = \ell^2(B) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$ mit Projektor P_B . Ein numerischer Lauf auf Darstellungslevel $L_{\max}$ setzt voraus, dass $B \subset K_{L_{\max}}$ gilt (Einbettung des Supports in den kanonischen Trunk). Das Arbeiten auf $K_{L_{\max}}$ ist bereits ein Coarse-Graining des ontischen Systems (Ausspuren des Tails $\overline{K}_{L_{\max}}$; vgl. oben).

Der **Normalfall** empirischer Systeme ist $B \neq B_0$: das System liegt *im Inneren* des dargestellten Trunks. Dann umfasst die (effektiv ausgespurte) Umwelt gleichzeitig (i) die Freiheitsgrade auf $K_{L_{\max}} \setminus B$ (“*äußere*” Freiheitsgrade relativ zum System innerhalb des dargestellten Trunks) und (ii) den ontisch vorhandenen, aber nicht dargestellten Tail $\overline{K}_{L_{\max}}$ (“*tiefe/innere*” Freiheitsgrade jenseits des Cut-offs). Der Spezialfall $B = B_0$ (System gleich globaler Trunk-Rand) ist demgegenüber eine besondere Wahl, bei der der Umweltanteil innerhalb des Trunks ausschließlich aus “inneren” Freiheitsgraden relativ zu B_0 besteht.

Verschachtelte Umwelten (normativ). Jede Umwelt ist in dieser Sichtweise selbst wieder ein System mit eigener (größerer) Umwelt. Formal wird dies über *geschachtelte Supports* modelliert: für $B \subset S \subset K_{L_{\max}}$ kann man S als System mit Umwelt $K_{L_{\max}} \setminus S$ behandeln und zugleich B als Subsystem von S mit Umwelt $S \setminus B$. Die Spezifikation benötigt hierfür keine Tensorfaktorzerlegung von $\mathcal{H}_{\text{tot}}$, sondern ausschließlich Supports, Projektoren und die fixierten Eliminations-/Reduktionsschritte (DtN/Kron bzw. der Randkanal Φ_B). Je größer der gewählte Support (bzw. je größer $L_{\max}$), desto mehr Freiheitsgrade sind *explizit* verfügbar und desto weniger wird in einem Schritt ausgespurt; alle in Driver-B verwendeten makroskopischen Größen (Randantworten/Kanäle, Mismatch, Δ_n , λ_n) sind damit *support- und cut-off-abhängige* Effektgrößen, die deterministisch aus dem aktuellen Approximanten abgeleitet werden.

1.7 Deterministische Umwelt-Mikrostruktur und konditionierte Trajektorien (normativ)

Zwei Approximationsfälle des IDEAL-Graphen (kontextrelevant). In dieser Spezifikation treten zwei physikalisch unterschiedliche, aber formal kompatible Approximationssituationen auf:

1. **Trunk-Approximation “ab B_0 ”:** Man wählt den dargestellten Trunk so, dass der *globale* Rand B_0 der Approximanten als Systemrand dient (typisch $B = B_0$). In diesem Spezialfall existiert innerhalb der Darstellung keine “äußere” Umwelt außerhalb des Trunks;

ausgespart werden nur *innere* Freiheitsgrade relativ zu B_0 (sowie der ontisch vorhandene, nicht dargestellte Tail).

2. **Zell-/Subsystem-Approximation:** Man betrachtet eine Zelle w als Subsystem (typisch $B = B_w \subset K_{L_{\max}}$, siehe § 1.12). Dann ist die effektive Umwelt die Vereinigung aus (i) dem Komplement $K_{L_{\max}} \setminus B_w$ innerhalb des dargestellten Trunks (“äußere” Freiheitsgrade relativ zur Zelle) und (ii) dem ontisch ausgesparten Tail jenseits des Cut-offs. Dies ist der *allgemeine* Fall.

Beide Fälle werden durch denselben supportbasierten System-/Umwelt-Schnitt (P_B , Φ_B , DtN/Kron) abgedeckt; sie unterscheiden sich nur in der physikalischen Interpretation der ausgesparten Freiheitsgrade.

Hinweis (Eingabeschnittstelle und GUI-Auswahl; nicht-normativ). Die Spezifikation fixiert die *mathematische* Wahl des Subsystems ausschließlich über den Support B (z. B. $B = B_0$ im Rand-/Spezialfall oder $B = B_w$ im allgemeinen Zell-/Subsystem-Fall) sowie die daraus folgenden Operatoren, Kanäle und Update-Regeln. *Wie* diese Wahl in einer konkreten Implementierung angegeben wird (GUI, CLI, Konfigurationsdatei) ist nicht Bestandteil der Modellphysik. Eine GUI-Funktion zur Zell-/Adressauswahl dient daher ausschließlich der Benutzerfreundlichkeit; sie setzt lediglich den experimentellen Parameter (z. B. w bzw. B) und *muss* den gewählten Wert deterministisch im Audit-Trail (`run_meta`, `env_lock`) persistieren. Insbesondere dürfen numerische Resultate nicht von der Wahl der Eingabeschnittstelle abhängen.

Hinweis (Subsystem-Familie und Rechenbudget). Alle nachfolgenden Konstruktionen (Seed, Kanäle, Mismatch, Update Δ_n , Leitwert-Update c_{n+1} sowie abgeleitete Observablen) gelten *punktweise* für jedes zulässige Subsystem B der Form $B = B_0$ (Spezial-/Randfall) oder $B = B_w$ (allgemeiner Zell-/Subsystem-Fall). Für einen endlichen Approximanten ist die zulässige Zellmenge endlich, z. B.

$$\mathcal{W}_{\leq K_{\max}} := \bigcup_{k=0}^{K_{\max}} \mathcal{S}^k \quad \Rightarrow \quad \{B_w : w \in \mathcal{W}_{\leq K_{\max}}\}.$$

Die Wahl eines *einzelnen* Subsystems (einer konkreten Zelle w) in Beispielen, Implementierungen oder Visualisierungen ist daher eine *Modellierungs- und Rechenbudgetentscheidung* (Begrenzung des Laufzeit-/Speicheraufwands) und dient zugleich der Demonstration, dass aus einem statischen Substrat eine deterministisch definierte, reduzierte (effektiv offene) Dynamik resultieren kann. Sie schränkt die Gültigkeit der Definitionen nicht ein. Eine Implementierung *kann* zusätzlich einen deterministischen Sweep über alle $w \in \mathcal{W}_{\leq K_{\max}}$ anbieten; dabei ist eine kanonische Ordnung (z. B. nach $(k, \text{lex}(w))$) zu verwenden und im Audit-Trail zu protokollieren.

Die optionalen Batch-Artefakte (Sweep über mehrere w) und deren Schema sind normativ in Definition 2.4 festgelegt.

Motivation. Ein vollständig symmetrischer, deterministischer Update auf einem symmetrischen Trunk kann einen Symmetriebruch *nicht* “aus dem Nichts” erzeugen. Effektive Stochastik und damit *trajektorienweiser* Symmetriebruch entstehen hier ausschließlich durch *unbeobachtete* Umwelt-Mikroinformation (Tail/Komplement), die im Modell nicht als Zufallsquelle postuliert, sondern als deterministischer, aber nicht kontrollierbarer Zustand geführt wird.

Axiom (Beobachterzugänglichkeit; reduzierter Beobachter). Ein *reduzierter Beobachter* im Subsystem mit Support B (insbesondere $B = B_w$) hat per Modellannahme *keinen* Zugang zu den äußeren Freiheitsgraden $V \setminus B$ (Komplement im dargestellten Trunk sowie Tail). Er kann daher Größen wie $\Lambda_{n,w}^{\text{glob}}$ nicht operational aus B -Daten rekonstruieren. Im Modell dürfen

diese Größen dennoch *definiert* und (für Diagnose/Simulation) *berechnet* werden, indem man die globale Box-Darstellung (L_n auf $V = K_{L_{\max}}$) als “Gottperspektive” verwendet und anschließend die festgelegte Reduktionssemantik (DtN/Kron bzw. Solve-Formulierung) auf B anwendet.

Deterministisches Seed-Funktional aus globaler Dynamik (normativ). In Pfeiler A wird der dargestellte Trunk $V := K_{L_{\max}}$ als *Systemgrenze/Darstellungsbox* verwendet: es werden *keine* weiteren Systeme “außerhalb” von V modelliert. Alle nicht dargestellten Freiheitsgrade (Tail jenseits $L_{\max}$) werden als *interne, ausgespurte* DOFs desselben abgeschlossenen Systems verstanden; ihre Wirkung kann nur über die (mit wachsendem $L_{\max}$ verfeinerbare) Trunk-Approximation operationalisiert werden.

Sei L_n die zum Schritt n gehörige gewichtete Laplace-Matrix auf V (aus dem aktuellen Leitwertfeld c_n). Für jede Zelle w (Tiefe k) mit Zellrand $B_w \subset V$ definieren wir den *Subsystem-Seed* im Schritt n als die *globale Randantwort* (DtN-Operator) des Komplements in der Box auf B_w :

$$\text{Seed}_n(w) := \Lambda_{n,w}^{\text{glob}} = \text{DtN}_{B_w}(L_n),$$

wobei DtN_{B_w} die in dieser Spezifikation fixierte Solve-/Schur-Semantik verwendet. Insbesondere ist für den Wurzel-Fall $w = \emptyset$ mit $B_\emptyset := B_0$

$$\text{Seed}_n(\emptyset) = \Lambda_{n,0}^{\text{glob}} = \text{DtN}_{B_0}(L_n),$$

also die kanonische “Box-Coarse-Graining”-Antwort des (dargestellten) Inneren auf den globalen Rand B_0 . Diese Wahl bricht die Skaleninvarianz des IDEAL-Modells *nur* durch (i) die Wahl der Systemgrenze B_0 und (ii) den Cut-off $L_{\max}$; es werden keinerlei zusätzliche freien Skalenparameter eingeführt.

Keine freien Outer-Dials. Es gibt in Pfeiler A keinen freien Outer-Level L_{out} und keine externe Seed-Quelle: $\text{Seed}_n(w)$ ist vollständig durch die globale Dynamik auf der Box (L_n) und die Wahl des Supports (B_w) bestimmt.

Symmetrie-Transparenz. Falls eine Graph-Automorphie $\sigma \in \text{Aut}(G)$ die Zellen $w_1 \mapsto w_2$ abbildet und zugleich L_n äquivariant ist, d. h. $P_\sigma^\top L_n P_\sigma = L_n$, dann gilt $\text{Seed}_n(w_2) = P^\top \text{Seed}_n(w_1) P$ für eine passende Permutationsmatrix P auf $B_{w_1} \rightarrow B_{w_2}$. In diesem Fall sind die Subsysteme *physikalisch ununterscheidbar* auf Pfeiler A-Niveau; ein “individueller” Seed pro Zelle kann dann *nicht* ohne eine tatsächliche Asymmetriequelle entstehen.

Orbit-Invarianz des Seeds und Individualisierung (normativ). Sei $G_{L_{\max}}^\bullet = (V, E)$ der dargestellte Trunk-Graph und sei $B_0 \subset V$ der globale Rand. Wir definieren die *Box-Symmetriegruppe* des Trunks als

$$\text{Aut}_{B_0}(V) := \{\pi \in \text{Aut}(G_{L_{\max}}^\bullet) : \pi(B_0) = B_0\},$$

und für einen gegebenen Zustand L_n die zugehörige *Zustands-Stabilisatorgruppe*

$$\text{Stab}_{B_0}(L_n) := \{\pi \in \text{Aut}_{B_0}(V) : P_\pi^\top L_n P_\pi = L_n\},$$

wobei P_π die Permutationsmatrix von π auf V bezeichnet. Zwei Zellen w, w' (gleiche Tiefe) heißen *zustandsäquivalent* (auf Pfeiler-A-Niveau), geschrieben $w \sim_n w'$, falls es ein $\pi \in \text{Stab}_{B_0}(L_n)$ gibt mit $\pi(B_w) = B_{w'}$.

Proposition 1.4 (Seed-Orbit-Invarianz (Konjugationsäquivalenz)). *Gilt $w \sim_n w'$, so existiert eine Permutationsmatrix $P_{w \rightarrow w'}$ auf $B_w \rightarrow B_{w'}$ mit*

$$\Lambda_{n,w'}^{\text{glob}} = P_{w \rightarrow w'}^\top \Lambda_{n,w}^{\text{glob}} P_{w \rightarrow w'}.$$

Bemerkung 1.9 (Beweisskizze). Die DtN-/Schur-Komplement-Konstruktion ist invariant unter Permutations-Ähnlichkeit: Schreibe $P_\pi^\top L_n P_\pi = L_n$ in Blockform relativ zu $B_w \sqcup (V \setminus B_w)$ und wende die Schur-Komplement-Definition von $\text{DtN}_{B_w}(L_n)$ an. Unter der Block-Permutation wird B_w nach $B_{w'}$ getragen und das Schur-Komplement transformiert konjugiert. Damit ist die globale Randantwort auf zustandsäquivalente Zellen nur ein Relabeling.

Konsequenz (wann kann ein “individueller Seed” entstehen?). Sei F ein *Konjugationsinvariant* auf Randantworten, d. h. $F(P^\top \Lambda P) = F(\Lambda)$ für alle Permutationsmatrizen P (z. B. Spektrum als Multimenge, $\text{tr}(\Lambda^k)$, deterministische Spektral-Signaturen). Dann gilt für alle $w \sim_n w'$:

$$F(\text{Seed}_n(w)) = F(\text{Seed}_n(w')).$$

Ein *individuelles* (zellabhängiges) Seed-Readout kann daher in Pfeiler A nur entstehen, wenn (i) w, w' in *verschiedenen* $\text{Stab}_{B_0}(L_n)$ -Orbits liegen oder (ii) der Zustand L_n die Struktur-Symmetrien bereits gebrochen hat (kleiner Stabilisator), so dass $\sim_n$ -Klassen klein werden.

Normatives Anti-Tie-Break-Gebot. Alle skalaren Seeds/Selection-Inputs, die zur Trajektorienkonditionierung verwendet werden (z. B. zur Konstruktion von $\theta_{0,w}$), müssen als Funktionen $F(\Lambda_{n,w}^{\text{glob}})$ gewählt werden, die unter Konjugation durch Permutationen invariant sind. Nicht-invariante Tie-Breaker (lex Ordnung, Vertex-IDs) dürfen ausschließlich als *Engineering-Hilfen* (D0-Reproduzierbarkeit) verwendet werden und gelten *nicht* als physikalische Individualisierung.

Maschinenprüfbares CI-Gate: Orbit- und Konjugationsinvarianz der Seeds. Die in diesem Abschnitt formulierten Symmetrieaussagen sind in Pfeiler A nicht nur narrativ, sondern als *harte, maschinenprüfbare* Gate-Bedingung zu verstehen. Wir unterscheiden zwei Modi:

- **Referenzmodus (Spezialfall $B = B_0$):** In einem explizit als “symmetrische Referenz” deklarierten Lauf (*special/reference run*) wird erwartet, dass der globale Zustand L_n die Corner-Symmetrien erhält.
- **Allgemeinmodus (beliebiges $B = B_w$):** Es wird *keine* Symmetrieerhaltung erwartet. Gültig ist jedoch: *jede* Symmetrie, die der aktuelle Zustand L_n tatsächlich besitzt, muss sich in einer Konjugationsäquivalenz der Seeds widerspiegeln (keine Label-Artefakte).

Kanonische Kandidaten-Symmetrien (SG/ST). Sei $q := |B_0| = |S_\bullet|$ die Anzahl der Corner-Symbole (SG: $q = 3$, ST: $q = 4$). Die natürlichen Box-Symmetrien auf Corner-Level sind die Permutationen der Symbole, also $\sigma \in S_q$. Diese induzieren eine Permutation π_σ auf den Rohvertices $\hat{V}_L = S_\bullet^L \times S_\bullet$ durch

$$\pi_\sigma(w, i) := (\sigma(w), \sigma(i)),$$

wobei σ komponentenweise auf Wörter wirkt. Durch die Definition von $\sim_L$ ist π_σ kompatibel mit dem Quotienten und induziert eine wohldefinierte Permutation auf V_L (und damit auf $V = K_{L_{\max}}$); wir bezeichnen die zugehörige Permutationsmatrix in der fixierten Vertex-Ordnung als P_σ . Für ein Subsystem B_w bezeichne $R_{\sigma,w}$ die restringierte Permutationsmatrix, welche die kanonische Ordnung auf B_w nach der kanonischen Ordnung auf $B_{\sigma(w)}$ abbildet.

Bemerkung 1.10 (ST: gesonderte Verifikation (normativ)). Die nachfolgenden Symmetrie-Gates sind formal für $q \in \{3, 4\}$ (SG/ST) identisch. **Für ST** gelten sie jedoch *ausschließlich* als *technische Konsistenzprüfungen* (Konjugations-/Orbit-Invarianz) und ersetzen **nicht** eine eigenständige ST-spezifische Verifikation/Kalibrierung (Numerik/Konditionierung, Regressionen, Stabilitätsfenster, ggf. alternative Normalisierungen). Physikalische Schlussfolgerungen für ST dürfen erst nach einer separaten ST-Prüfung gezogen werden.

Numerische Toleranzen (deterministisch). Sei $\varepsilon_{\text{floor}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{mach}}}$ wie in dieser Spezifikation fixiert. Wir definieren deterministische Symmetrie-Toleranzen

$$\tau_L := 64 \varepsilon_{\text{floor}} \max\{1, \|L_n\|_F\}, \quad \tau_\Lambda := 64 \varepsilon_{\text{floor}} \max\{1, \|\Lambda_{n,w}^{\text{glob}}\|_F\}.$$

Die Konstanten sind rein numerisch motiviert (float64-Rundungsfehler) und *keine* Modellparameter.

Gate-Algorithmus (pro Schritt n). Für jede $\sigma \in S_q$ wird zunächst geprüft, ob σ eine tatsächliche Symmetrie von L_n ist:

$$\Delta_\sigma(L_n) := \|P_\sigma^\top L_n P_\sigma - L_n\|_F.$$

Falls $\Delta_\sigma(L_n) \leq \tau_L$, wird σ als Element des Stabilisators $\text{Stab}_{B_0}(L_n)$ akzeptiert. Für jedes akzeptierte σ und jede getestete Zelle w ist dann die *Konjugationsäquivalenz* der Seeds zu prüfen:

$$\Delta_{\sigma,w}(\Lambda) := \|R_{\sigma,w}^\top \Lambda_{n,w}^{\text{glob}} R_{\sigma,w} - \Lambda_{n,\sigma(w)}^{\text{glob}}\|_F \leq \tau_\Lambda.$$

Zusätzlich müssen *alle* in Pfeiler A zulässigen skalaren Seed-Readouts F (vgl. Anti-Tie-Break-Gebot) diese Konjugationsinvarianz respektieren:

$$|F(\Lambda_{n,w}^{\text{glob}}) - F(\Lambda_{n,\sigma(w)}^{\text{glob}})| \leq 64 \varepsilon_{\text{floor}} \max\{1, |F|\}.$$

Pass/Fail/Skip-Semantik.

- **Allgemeinmodus:** Für jedes getestete (n, w) gilt: Falls mindestens ein σ akzeptiert wurde, muss obige Konjugationsprüfung für *alle* akzeptierten σ bestehen, sonst **FAIL**. Falls kein σ akzeptiert wurde, wird das Gate als **SKIP** markiert (Symmetrie gebrochen).
- **Referenzmodus:** Es wird gefordert, dass *alle* $\sigma \in S_q$ akzeptiert werden und die Konjugationsprüfung besteht, sonst **FAIL**. Damit wird “keine künstliche Symmetriebrechung” maschinenprüfbar.

Vererbung von Leitwerten und Energiegrößen (nur Restriktion; normativ). In Pfeiler A existiert zu jedem Schritt n genau *ein* globaler REAL-Zustand als Leitwertfeld $c_n : E(V) \rightarrow (0, \infty)$ auf der Darstellungsbox $V = K_{L_{\max}}$. Wird eine Zelle w als Subsystem betrachtet, so werden Leitwerte *nicht* neu initialisiert oder separat “pro Zelle” evolviert; vielmehr ist jede Subsystem-Sicht eine *Restriction* desselben globalen Zustands auf die jeweiligen Kanten-/Vertexmengen (z. B. auf $E(V_w)$ oder auf die im Driver-B adressierten Kantenmengen $E_w^{(k)}$), kombiniert mit der festgelegten Reduktionssemantik (DtN/Kron bzw. Solve-Formulierungen). Alle in der Zellenanalyse verwendeten “Energien” (Randenergien auf B_w , Edge-Energien $E_{n,w}(e)$, Knotenenergien auf B_w) sind *abgeleitete* Größen aus denselben (globalen oder lokal-restringierten) Solve-Problemen auf L_n bzw. auf den Submatrizen $Q_{n,w} = (L_n)_{V_w, V_w}$ (vgl. Abschnitte 2.3, 2.7 und 4.7 ff.).

Terminologie (prä-geometrische “Energie”; normativ). Alle in Pfeiler A verwendeten “Energie”-Größen sind *prä-geometrische, abstrakte Funktionale*: Dirichlet-/Widerstandsenergien und Randantwort-Energie-Funktionale, die aus Solve-/DtN-Operationen auf dem globalen Operator L_n (bzw. seinen Restriktionen) abgeleitet werden. Es wird *keine* Identifikation mit physikalischer Energie im Sinn eines Hamiltonoperators (und keine klassische Energieerhaltung) vorgenommen; “Energie” dient hier ausschließlich als driver-/antwortbasierte Skalargröße zur Kalibrierung und als Gauge-Fix (vgl. λ_n).

Es wird in Pfeiler A *keine* Energieerhaltung für einzelne Subsysteme postuliert: ein Subsystem kann über das Komplement $V \setminus B_w$ “Fluss”/Energie mit seiner Umwelt austauschen. Die einzige explizite Erhaltungs-Constraint ist die globale prä-geometrische Randenergie-Summe $E_{B_0,n}^{\text{tot}}$ auf der Box, die per λ_n als *Gauge-Fix* implementiert wird, um eine triviale globale Skalendrift der rand-inzidenten Leitwerte zu entfernen; sie ist ausdrücklich *nicht* als physikalische Many-Body-Energieerhaltung zu lesen.

Bemerkung (Seed ohne Zufallsprimitive). Ein deterministischer Seed für ein Subsystem ist in dieser Spezifikation eine Konsequenz der Umwelt-Reduktion: *selbst wenn* das zugrundeliegende ontische Modell deterministisch ist, erzeugt das Ausspüren nichtzugänglicher DOFs für einen reduzierten Beobachter effektive, nicht kontrollierbare Randdaten. Die in dieser Subsection eingeführten Größen ($\text{Seed}_n(w)$, $\theta_{n,w}$) sind daher *keine* Zufallsprimitive, sondern Parameterisierungen nichtzugänglicher Umweltinformation (ohne zusätzliche Freiheitsgrade).

Deterministisches Umweltregister (klassisch, nicht ontisch). Für jedes betrachtete Subsystem (insbesondere jede Zelle w) wird ein zusätzliches, klassisches Register

$$\theta_{n,w} \in [0, 1)$$

eingeführt, das *unbeobachtete* Umwelt-Mikroinformation zusammenfasst. Dieses Register ist *kein* stochastischer Seed und *keine* neue ontische Struktur; es parametrisiert lediglich, welche konditionierte Trajektorie innerhalb einer gegebenen (unbedingten) CPTP-/GKSL-Beschreibung realisiert wird. Wichtig: In dieser Spezifikation ist $\theta_{0,w}$ *kein freier Parameter*; es wird kanonisch aus dem deterministischen Subsystem-Seed abgeleitet (siehe nächster Absatz).

Für den Spezialfall $B = B_0$ (keine “äußeren” DOFs im dargestellten Trunk) fixieren wir kanonisch $\theta_{0,\emptyset} := 0$ (symmetrische Referenz) und verwenden standardmäßig den Erwartungsmodus; der Trajektorienmodus bleibt zwar definiert, ist in diesem Spezialfall jedoch nur als Diagnose sinnvoll, da er ohne eine tatsächliche Asymmetriequelle keine physikalisch belastbare Trajektorien-Interpretation besitzt.

Kanonische Initialisierung von $\theta_{0,w}$ (normativ). Wir eliminieren freie Initialisierungsparameter, indem $\theta_{0,w}$ deterministisch *aus dem Subsystem-Seed* $\text{Seed}_0(w)$ konstruiert wird. Um keine künstlichen Symmetriebrüche durch Index-/Labelwahl zu erzeugen, wird die Initialisierung *invariant unter Relabelings* von B_w fixiert.

Symmetrisierung. Setze

$$S_w := \frac{1}{2}(\text{Seed}_0(w) + \text{Seed}_0(w)^\top) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad m := |B_w|.$$

Spektralinvariante Signatur. Sei $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ die (reellen) Eigenwerte von S_w in nichtabsteigender Ordnung. Definiere die deterministische Quantisierungsskala

$$q_w := \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, \|S_w\|_F\},$$

und die ganzzahlige Signatur

$$z_k(w) := \text{round}(\lambda_k/q_w) \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, \dots, m,$$

wobei round die Rundung auf die nächste ganze Zahl (Tie-break zu “away from zero”) bezeichnet. Diese Signatur ist invariant unter Permutations-Similarität von S_w und ist gegenüber numerischen Kleinststörungen auf Skala $\mathcal{O}(\varepsilon_{\text{floor}}\|S_w\|)$ stabil.

Hash-zu-Intervall. Sei $\text{ser}_{i64}(z_1, \dots, z_m)$ die Bytefolge, die entsteht, wenn die Werte z_k in der obigen Reihenfolge als signed 64-bit Integer (Big-Endian, Zweierkomplement) serialisiert werden. Sei SHA256 die fest gewählte 256-bit Hashfunktion und $\text{u64}(\cdot)$ die Auswertung der ersten 64 Bits. Dann definieren wir für $w \neq \emptyset$

$$\theta_{0,w} := \frac{\text{u64}\left(\text{SHA256}\left(\text{ser}_{i64}(z_1(w), \dots, z_m(w))\right)\right)}{2^{64}} \in [0, 1).$$

Für den Wurzel-Fall fixieren wir kanonisch $\theta_{0,\emptyset} := 0$ (symmetrische Referenz) und verwenden standardmäßig den Erwartungsmodus.

Deterministische Auswahlfunktion Sel (label-invariant; tie-sicher). Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge von Outcomes und $\pi : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ eine Wahrscheinlichkeitsmasse mit $\sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a) = 1$. Wir definieren eine *wertbasierte* (label-unabhängige) Ordnung durch Sortierung nach absteigender Wahrscheinlichkeit. Setze dazu eine deterministische Toleranz

$$\tau_{\text{Sel}} := \varepsilon_{\text{floor}}.$$

Falls es $a \neq b$ mit $|\pi(a) - \pi(b)| \leq \tau_{\text{Sel}}$ gibt (numerische oder symmetriebedingte Gleichstände), definieren wir

$$\text{Sel}(\theta, \pi) := \perp \quad (\text{keine eindeutige Auswahl ohne zusätzliche Information}).$$

Andernfalls sei $(a_1, \dots, a_{|\mathcal{A}|})$ die eindeutige Auflistung von $\mathcal{A}$ mit $\pi(a_1) > \pi(a_2) > \dots > \pi(a_{|\mathcal{A}|})$. Dann definieren wir für $\theta \in [0, 1)$

$$\text{Sel}(\theta, \pi) := a_k, \quad k := \min \left\{ j : \sum_{\ell=1}^j \pi(a_\ell) > \theta \right\}.$$

Damit wird *ohne* Zufallsprimitive aus einer Verteilung π ein Outcome gewählt, sobald θ gegeben ist. Im Gleichstandsfall ($\text{Sel} = \perp$) wird *explizit nicht* künstlich symmetriebrechend gewählt.

Deterministisches Update von θ (mischend; bidirektional koppelfähig). Um eine effektive “Rauschartigkeit” aus deterministischer Dynamik zu ermöglichen, wird $\theta_{n,w}$ selbst deterministisch (mischend) aktualisiert. Wir fixieren kanonisch

$$\theta_{n+1,w} := \text{frac} \left(2\theta_{n,w} + \frac{\nu_{n,w}^{\text{Sel}} + 1}{|\mathcal{A}_w| + 1} \right),$$

wobei $\text{frac}(x) := x - \lfloor x \rfloor$ und $\nu_{n,w}^{\text{Sel}} \in \{0, \dots, |\mathcal{A}_w| - 1\}$ ein deterministisch aus der Auswahl $a^*(n, w)$ abgeleiteter Rangindex ist: Falls $a^*(n, w) = \perp$ setzen wir $\nu_{n,w}^{\text{Sel}} := 0$. Andernfalls sei $(a_1, \dots, a_{|\mathcal{A}_w|})$ die eindeutige Ordnung von $\mathcal{A}_w$ mit $\pi(a_1) > \dots > \pi(a_{|\mathcal{A}_w|})$ (wie in der Definition von Sel), und $a^*(n, w) = a_k$; dann ist $\nu_{n,w}^{\text{Sel}} := k - 1$. $\mathcal{A}_w$ ist die jeweilige Outcomemenge (hier: ungeordnete Paare $i < j$ auf B_w). Diese Update-Regel ist deterministisch, benötigt keine zusätzlichen Parameter und koppelt Mikro $\leftrightarrow$ Makro über den Outcome-Index.

Konditionierte Trajektorien (Driver-B-Lift; optional, aber vollständig definiert). Im Erwartungsmodus (Default) werden in jedem Schritt (n, w) die Proben über alle Paare $i < j$ mit Gewichten $\omega_{\{i,j\}}(n, w)$ gemittelt (vgl. “Probengewichte aus OQS-Raten”). Im Trajektorienmodus wird dagegen ein einzelnes aktives Paar ausgewählt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_w &:= \{\{i, j\} : 0 \leq i < j \leq q - 1\}, & \pi_{\{i,j\}}(n, w) &:= \omega_{\{i,j\}}(n, w), \\ a^*(n, w) &:= \text{Sel}(\theta_{n,w}, \pi(\cdot; n, w)) \in \mathcal{A}_w \cup \{\perp\}. \end{aligned}$$

Dann wird in allen nachfolgenden Definitionen des Schritts (n, w) die Erwartungsgewichtung durch die (tie-sichere) Trajektoriengewichtung ersetzt:

$$\omega_a^{\text{traj}}(n, w) := \begin{cases} \pi_a(n, w), & a^*(n, w) = \perp, \\ \mathbf{1}\{a = a^*(n, w)\}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad a \in \mathcal{A}_w.$$

Damit wird die gesamte Edge-Energie $\mathcal{E}_{n,w}(e)$ (und folglich $\tilde{p}_{n,w}$ und der Leitwert-Update) trajektorienweise konditioniert, bleibt aber als Abbildung des erweiterten Zustands $(c_n, \theta_{n,\cdot})$ *deterministisch*.

Konsistenz (Erwartungswert als Spezialfall). Falls $\theta_{n,w}$ über viele Runs effektiv gleichverteilt ist (z. B. durch Mischung oder durch epistemische Unkenntnis von $\theta_{0,w}$), dann reproduziert das empirische Mittel der Trajektorien die Erwartungsgewichtung: die relative Häufigkeit der Outcomes $\{i, j\}$ nähert sich $\pi_{\{i,j\}}(n, w) = \omega_{\{i,j\}}(n, w)$ an. Damit ist der Erwartungsmodus ein konsistenter Spezialfall/Ensemble-Limes des Trajektorienmodus.

1.8 Prä-geometrische Lokalität und effektive Rand-Nichtlokalität (normativ)

In dieser Spezifikation gibt es noch keine a priori gegebene Raumzeit, keine Lichtkegel und keine mikroskopische Kausalstruktur im Sinne eines Kontinuums. *Lokalität* wird daher prä-geometrisch über die Graphstruktur des (dargestellten) Trunks sowie über Supports von Operatoren definiert.

Definition 1.6 (Prä-geometrische Graph-Lokalität). Sei $G = (V, E)$ ein (endlicher) dargestellter Trunk-Graph auf Darstellungslevel $L_{\max}$ und sei $d_G(\cdot, \cdot)$ die kürzeste Pfadlänge (Graphdistanz) in G . Ein Operator A auf $\mathcal{H}_V := \ell^2(V) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$ heißt *R-lokal* (für $R \in \mathbb{N}$), wenn

$$\langle u, \alpha | A | v, \beta \rangle = 0 \quad \text{für alle } u, v \in V \text{ mit } d_G(u, v) > R \text{ und alle } \alpha, \beta \in \{1, \dots, d_p\},$$

wobei $|u, \alpha\rangle$ die kanonische Basis von $\ell^2(V) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$ bezeichnet. Insbesondere ist die (gewichtete) Laplace-Matrix L_n des Trunks *1-lokal* in diesem Sinn, da sie nur entlang von Kanten koppelt.

Definition 1.7 (Coarse-Graining als Eliminierung von Freiheitsgraden (DtN/Kron)). Sei $B \subset V$ ein endlicher Support (“System”) und $\bar{B} := V \setminus B$ (“Umwelt” innerhalb des dargestellten Trunks). Sei L_n die (gewichtete) Laplace-Matrix auf V . Das *Coarse-Graining* der Freiheitsgrade $\bar{B}$ auf den Support B wird durch die deterministische Schur-Komplement- / Kron-Reduktion (DtN-Operator) definiert als

$$\Lambda_{n,B} := (L_n)_{BB} - (L_n)_{B\bar{B}} \text{ solve}(\text{Reg}_{\text{SPD}}((L_n)_{\bar{B}\bar{B}}), (L_n)_{\bar{B}B}).$$

Dabei ist Reg_{SPD} die kanonische SPD-Regularisierung aus Definition 2.8, und solve folgt Definition 2.9.

Proposition 1.5 (Effektive Rand-Nichtlokalität ist generisch). *Unter den Bedingungen von Definition 1.7 ist $\Lambda_{n,B}$ im Allgemeinen nicht R-lokal für irgendein festes, kleines R bezüglich der durch G induzierten Distanz auf B. Insbesondere kann $\Lambda_{n,B}$ als Matrix auf B dicht werden, selbst wenn L_n 1-lokal ist.*

Beweis (Skizze). Schreibe $\Lambda_{n,B} = (L_n)_{BB} - (L_n)_{B\bar{B}} G_{\bar{B}\bar{B}} (L_n)_{\bar{B}B}$ mit $G_{\bar{B}\bar{B}} := \text{Reg}_{\text{SPD}}((L_n)_{\bar{B}\bar{B}})^{-1}$ (numerisch realisiert über $\text{solve}(\text{Reg}_{\text{SPD}}((L_n)_{\bar{B}\bar{B}}), \cdot)$). Schon für $d_p = 1$ ist $(\Lambda_{n,B})_{uv}$ für $u \neq v$ eine Summe von Termen der Form $\sum_{x,y \in \bar{B}} (L_n)_{ux} (G_{\bar{B}\bar{B}})_{xy} (L_n)_{yv}$. Bei verbundenem G koppeln typischerweise viele Randknoten über innere Pfade in $\bar{B}$; der Greensche Kern $G_{\bar{B}\bar{B}}$ ist (unter Jitter) wohldefiniert und im Allgemeinen nicht dünn besetzt. Damit entstehen für viele Paare $u, v \in B$ nichtverschwindende Beiträge, selbst wenn $(L_n)_{uv} = 0$ für $d_G(u, v) > 1$. Streng genommen liefert dies keine Aussage “immer”, sondern eine generische: Dünnbesetztheit von $\Lambda_{n,B}$ erfordert zusätzliche, nicht in der Spezifikation postulierte Struktur (z.B. spezielle Symmetrien/Entkopplungen). $\square$

Bemerkung 1.11 (Begründung/Intuition). Die Nichtlokalität entsteht hier nicht als fundamentale “Fernwirkung”, sondern als *Response-Effekt* durch Eliminierung von Freiheitsgraden: $(L_n)_{B\bar{B}}$ koppelt den Rand in das Innere, und das Lösen im Block $(L_n)_{\bar{B}\bar{B}}$ propagiert diese Anregung durch alle inneren Pfade, bevor sie über $(L_n)_{\bar{B}B}$ auf B zurückwirkt. Schon in endlichen Netzwerken führt das Schur-Komplement typischerweise zu effektiven Kopplungen zwischen vielen (oder allen) Randknoten. Im prä-geometrischen Rahmen bedeutet “lokal” daher: *lokale Mikrokopplungen auf dem Graphen* können nach Coarse-Graining zu *nichtlokalen effektiven Randgesetzen* werden.

Bemerkung 1.12 (Konsequenz für Approximanten). Da (i) der Trunk-Cut-off $L_{\max} < \infty$ per ontischem Postulat bereits ein Coarse-Graining des unendlichen Tails ist und (ii) ein empirisches System durch einen inneren Support B typischerweise zusätzlich äußere Freiheitsgrade $K_{L_{\max}} \setminus B$ eliminiert, ist **effektive Nichtlokalität auf B der Normalfall**. Der Spezialfall $B = B_0$ minimiert zwar die “äußere” Eliminierung innerhalb des Trunks, eliminiert aber weiterhin den Tail jenseits $L_{\max}$.

1.9 Warum in Pfeiler A keine Tensorfaktorzerlegung postuliert wird (normativ)

In Pfeiler A wird der globale Zustandsraum *kanonisch* als $\mathcal{H}_{\text{tot}} = \ell^2(V_\infty^\bullet) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$ fixiert. Subsysteme werden durch *Supports* $B \subset V_\infty^\bullet$ und die entsprechenden Projektoren P_B beschrieben. Dies impliziert eine natürliche *Orthogonalzerlegung* (Direktsumme), aber keine kanonische Tensorfaktorisierung.

Definition 1.8 (Support-Hilberträume und Orthogonalzerlegung). Für einen endlichen Support $B \subset V_\infty^\bullet$ sei

$$\mathcal{H}_B := \ell^2(B) \otimes \mathbb{C}^{d_p}, \quad \mathcal{H}_{\bar{B}} := \ell^2(V_\infty^\bullet \setminus B) \otimes \mathbb{C}^{d_p}.$$

Dann gilt kanonisch

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_{\bar{B}},$$

induzierter Projektor $P_B : \mathcal{H}_{\text{tot}} \rightarrow \mathcal{H}_B$, sowie die in dieser Spezifikation definierte supportbasierte CPTP-Reduktion Φ_B .

Proposition 1.6 (Keine kanonische, graph-kompatible Tensorfaktorisierung in Pfeiler A). *Die in Definition 1.8 kanonische Zerlegung ist eine Direktsumme. Eine Tensorfaktorzerlegung $\mathcal{H}_{\text{tot}} \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, die (i) die Support-Struktur $B \mapsto \mathcal{H}_B$ und (ii) die prä-geometrische Graph-Lokalität (Definition 1.6) ohne zusätzliche, nicht in Pfeiler A postulierte Struktur respektiert, wird in dieser Spezifikation nicht angenommen.*

Beweis (Skizze). Die Orthogonalzerlegung $\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_{\bar{B}}$ folgt kanonisch aus der Zerlegung der Basisvektoren nach Stütze (Vertex-Labels). Eine Tensorfaktorisierung $\mathcal{H}_{\text{tot}} \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ würde hingegen eine zusätzliche, nicht aus der Support-Struktur bestimmte Identifikation der Basis als Paare (Systemindex, Umweltindex) erfordern. Zwar sind alle separablen unendlichen Hilberträume abstrakt isomorph, jedoch ist eine solche Isomorphie ohne zusätzliche Wahl *nicht kanonisch* und respektiert im Allgemeinen weder die Support-Zuordnung $B \mapsto \mathcal{H}_B$ noch die Graph-Lokalität (Definition 1.6), weil sie Vertex-Labels in nichtlokale Indexpaare “verwirbelt”. Daher wird in Pfeiler A bewusst keine Tensorfaktorzerlegung postuliert; Subsysteme werden über Supports und CP-Maps behandelt. $\square$

Bemerkung 1.13 (Warum “Partial Trace” hier (noch) nicht der richtige Begriff ist). Ein partielles Spuren Tr_E setzt eine wohldefinierte Tensorproduktstruktur $S \otimes E$ voraus. Da Pfeiler A stattdessen supportspezifische Subräume und (i) DtN/Kron-Eliminierung (Definition 1.7) sowie (ii) CPTP-Support-Reduktionen Φ_B verwendet, ist “Ausspuren” hier *operational* als *Eliminierung über Schur-Komplement* und/oder als *supportbasierte CPTP-Reduktion* zu verstehen. Dies ist kompatibel mit offenen Dynamiken auf einem Trunk, ohne Many-Body-Annahmen (lokale $\mathcal{H}_v$ pro Vertex, Statistik, Fockraum, Nebenbedingungen) vorwegzunehmen.

Bemerkung 1.14 (Perspektive). Eine Tensorfaktorstruktur kann in späteren Pfeilern sinnvoll werden, wenn zusätzliche mikroskopische Freiheitsgrade pro Vertex oder eine Fockraum-/Algebra-Struktur eingeführt bzw. aus dem prä-geometrischen Modell abgeleitet werden. Pfeiler A bleibt davon unabhängig und fixiert nur die minimal notwendige Struktur für deterministische Randantworten, Mismatch und Pullback-Updates.

1.10 Level- L -Kanten und Loop-Ausschluss

Fixiere ein Darstellungs-/Trunk-Level $L_{\text{max}} \in \mathbb{N}_0$ und setze $V := V_{L_{\text{max}}}^\bullet$ als *sichtbaren* Approximanten. Ontisch gilt $L_{\text{max}} = \infty$; das Abschneiden ist ein Coarse-Graining (vgl. vorherige Subsection).

Definiere die (einfache) Kantenmenge

$$E := E_{L_{\max}}^\bullet := \left\{ \{x, y\} \subset V : \begin{array}{l} \exists w \in S_{\bullet}^{L_{\max}}, \\ \exists i \neq j \in S_{\bullet}, \\ x = [(w, i)]_{\sim_{L_{\max}}}, \quad y = [(w, j)]_{\sim_{L_{\max}}}, \\ x \neq y \end{array} \right\}.$$

Proposition 1.7 (Wohldefiniertheit der Kantenkonstruktion; einfacher Graph). *Die Konstruktion von $E = E_{L_{\max}}^\bullet$ liefert einen wohldefinierten, ungerichteten einfachen Graphen auf V :*

- **Keine Loops:** Für jede Kante $\{x, y\} \in E$ gilt $x \neq y$.
- **Keine Multikanten:** E ist eine Menge von 2-Element-Teilmengen von V ; mehrfach auftretende Realisierungen derselben Kante über unterschiedliche Wörter w werden identifiziert.

Beweis. Die Loopfreiheit folgt unmittelbar aus der Nebenbedingung $x \neq y$ in der Definition von E . Multikanten sind ausgeschlossen, weil E als Menge von Teilmengen $\{x, y\}$ definiert ist; dieselbe Teilmenge kann nicht doppelt in E vorkommen. Dass die Quotientenidentifikationen $\sim_{L_{\max}}$ in Randfällen auch $(w, i) \sim_{L_{\max}} (w, j)$ für $i \neq j$ zulassen können, ist beabsichtigt: solche Kandidaten erzeugen dann kein Element von E , da die Bedingung $x \neq y$ verletzt wäre. $\square$

1.11 Randmenge B_0 (Corner-Vertices im Trunk)

Definiere für jedes $i \in S_{\bullet}$ den Randknoten

$$b_i := [(i^{L_{\max}}, i)]_{\sim_{L_{\max}}} \in V, \quad B_0 := \{b_i : i \in S_{\bullet}\} \subset V.$$

1.12 Subsystemränder B_w (Zellränder) im Trunk

Für jedes Wort $w \in S_{\bullet}^k$ mit $0 \leq k \leq L_{\max}$ definieren wir die Zellrandknoten

$$b_{w,i} := [(w i^{L_{\max}-k}, i)]_{\sim_{L_{\max}}} \in V, \quad i \in S_{\bullet}, \quad B_w := \{b_{w,i} : i \in S_{\bullet}\} \subset V.$$

Im Spezialfall $w = \emptyset$ gilt $B_{\emptyset} = B_0$. In der Zell-/Subsystem-Approximation ist typischerweise $B = B_w$ für ein fest gewähltes w .

(1.5a) Kanonische Ordnung auf Wörtern und Repräsentanten. Wir verwenden die lexikographische Ordnung auf $S_{\bullet}^L$ (Vergleich an der ersten Position, an der sich zwei Wörter unterscheiden). Für Paare $(w, i) \in S_{\bullet}^{L_{\max}} \times S_{\bullet}$ definieren wir

$$(w, i) <_{\text{lex}} (w', i') \iff (w <_{\text{lex}} w') \text{ oder } (w = w' \text{ und } i < i').$$

(1.5b) Kanonische Repräsentantenabbildung und Vertex-IDs. Für $x \in V$ definiere die (nichtleere) Menge der Repräsentanten

$$\text{Rep}(x) := \{(w, i) \in \widehat{V}_{L_{\max}} : [(w, i)]_{\sim_{L_{\max}}} = x\}.$$

Definiere den kanonischen Repräsentanten

$$\text{repr}(x) := \min_{<_{\text{lex}}} \text{Rep}(x).$$

Ordne V strikt total durch $x \prec y \iff \text{repr}(x) <_{\text{lex}} \text{repr}(y)$ und definiere die kanonische ID

$$\text{id}(x) := \text{rank}_{\prec}(x) \in \{0, 1, \dots, |V| - 1\}.$$

Damit ist $\min(V)$ wohldefiniert als das eindeutig bestimmte $x \in V$ mit minimaler $\text{id}(x)$.

(1.5c) Deterministische Matrixkonvention (Subsets). Für jede Teilmenge $U \subseteq V$ fixieren wir die Reihenfolge der Elemente als aufsteigend nach id. Jede Submatrix $M_{U,U}$ (z.B. $(L_n)_{U,U}$) ist als Hauptuntermatrix in dieser Ordnung zu verstehen.

(1.5d) Ordnung der Randknoten. Wir identifizieren $B_0 = \{b_i : i \in S_\bullet\}$ mit der geordneten Liste $(b_i)_{i \in S_\bullet}$ in aufsteigender Symbolordnung. Alle Randvektoren/Matrizen (z.B. $y^{(i)}, \Lambda_n$) werden in dieser Ordnung dargestellt. Analog ordnen wir $B_w = \{b_{w,i} : i \in S_\bullet\}$ stets als $(b_{w,i})_{i \in S_\bullet}$.

1.13 IDEAL-Hinweis zur Energierenormierung

Bemerkung 1.15 (Terminologie: prä-geometrische Energien). Der in dieser Spezifikation verwendete Begriff “Energie” bezeichnet auf Pfeiler A-Niveau ausschließlich *prä-geometrische* Energieformen (Dirichlet-/Widerstandsenergien) der Graph-Approximanten sowie daraus abgeleitete Antwort-/Driver-Funktionale. Diese Größen sind dimensionslos bzw. skalenkonvention-abhängig (Renormierung) und werden *nicht* mit physikalischer Energie eines Hamiltonoperators identifiziert.

Für $\bullet = \text{SG}$ ist die Standard-Energierenormierung $r_{\text{SG}} = 3/5$ (äquivalent Skalierung $(5/3)^m$) etabliert.[1, 3] Für $\bullet = \text{ST}$ wird kein universeller offener Zahlenwert behauptet; wir führen stattdessen

$$r_\star \in (0, 1)$$

als Modellparameter (abhängig von der gewählten harmonischen Struktur) und setzen $r_\star = r_{\text{SG}}$ im SG-Fall.

2 REAL-Graph als prä-OQS (vNext.3-canonical)

2.1 Numerische Kanonisierung (float64-deterministisch)

Wir arbeiten deterministisch in IEEE float64 und definieren

$$\varepsilon_{\text{mach}} := \text{eps}(\text{float64}), \quad \varepsilon_{\text{floor}} := \sqrt{\varepsilon_{\text{mach}}}, \quad \varepsilon := \varepsilon_{\text{floor}}, \quad \varepsilon_0 := \max\{r_\star^{L_{\text{max}}}, \varepsilon_{\text{floor}}\}.$$

Geltungsbereich, Regularisierung und Rand-Constraint (Scope). Die Operatoren $\Lambda_n, \Lambda_{n,w}$ und die Widerstandsmetrik d_n werden hier als *numerisch implementierbare* Größen in IEEE float64 definiert. Dazu gehören insbesondere die kanonische SPD-Regularisierung $\text{Reg}_{\text{SPD}}(\cdot)$ aus Definition 2.8 sowie die daraus abgeleiteten, explizit regularisierten DtN/Kron-Operatoren und Widerstandsgrößen; diese ersetzen in der Implementationsschicht die nicht-robuste exakte Inversion/Pseudoinversion. Physikalisch sind sie *keine* Modellparameter, sondern eine maschinenpräzisionsgetriebene Stabilisierung (Grenzfall: exakte Arithmetik $\Rightarrow \delta \rightarrow 0$).

Konvergenz- und Grenzwertstatus (normativ: Hypothesen + numerisches Verifikationsprotokoll). Diese Spezifikation definiert für jedes endliche Darstellungslevel L_{max} *Approximanten-Objekte* (z.B. $L_n^{(L_{\text{max}})}, \Lambda_n^{(L_{\text{max}})}, \Lambda_{n,w}^{(L_{\text{max}})}, d_n^{(L_{\text{max}})}, \Phi_{n,w}^{x,(L_{\text{max}})}$). Für physikalische Aussagen ist entscheidend, ob und wie diese Objekte bei $L_{\text{max}} \uparrow \infty$ stabil werden. Da hier keine Konvergenztheorie bewiesen wird, fixieren wir normativ den Status als *Hypothesen + Protokoll*:

Definition 2.1 (Konvergenz-Hypothesen (Status: unbewiesen; zu verifizieren)). Für ein festes n und einen festen Support B formulieren wir die folgenden Hypothesen:

- (H1)** (DtN-Stabilität) Die Randantworten konvergieren in Operatornorm: $\|\Lambda_{n,B}^{(L)} - \Lambda_{n,B}^{(L-1)}\| \rightarrow 0$ für $L \rightarrow \infty$.
- (H2)** (Channel-Stabilität) Die CPTP-Zeitschritte auf B stabilisieren: $\|\Psi_{n,B}^{(L)} - \Phi_{n,B}^{(L-1)}\|_\diamond \rightarrow 0$. [19, 20]

(H3) (Metric-Stabilität) Die Widerstandsmetrik stabilisiert auf endlichen Supports: $|d_n^{(L)}(u, v) - d_n^{(L-1)}(u, v)| \rightarrow 0$ für alle $u, v \in B$.

Diese Hypothesen sind *nicht* Teil der Axiome; sie sind die expliziten Bedingungen, unter denen Grenzwert-Aussagen physikalisch interpretiert werden dürfen.

Bemerkung 2.1 (Prä-geometrische Kanalnotation und Blick auf Emergenzpfade). In dieser Definition treten zwei unterschiedliche CPTP-Abbildungen auf, die *nicht* zu identifizieren sind[7, 18]:

1. Φ_B bezeichnet die *Support-Coarse-Graining*-Abbildung (Einbettung/Reduktion auf den Support B) und ist konzeptionell ein Teil der Beobachter-/Support-Spezifikation; sie trägt keine dynamische Information und ist (bei festem B) nicht vom Trunk-Level abhängig.
2. $\Psi_{n,B}^{(L)}$ bezeichnet den durch den L -trunkierten Graphen induzierten Rand-Zeitschritt auf B , d. h. (schematisch)

$$\Psi_{n,B}^{(L)} := \Phi_B \circ \mathcal{T}_n^{(L)} \circ \iota_B,$$

wobei $\mathcal{T}_n^{(L)}$ exakt nach der in Abschnitt 2 definierten intrinsischen Wahl konstruiert wird, jedoch mit den Daten des L -Approximanten (insb. Laplacian $L_n^{(L)}$ und zugehörige Operatoren). Für Rechnungen bei festem Cut-off $L_{\max}$ schreiben wir abkürzend $\Psi_{n,B} := \Psi_{n,B}^{(L_{\max})}$.

Emergenzpfad-Hinweis. Aussagen, die $\Psi_{n,B}$ als „physikalische“ effektive Dynamik interpretieren, sind erst nach Level-Stabilität (H1–H3) sowie nach einer separaten Kalibrierung der Skalen (Zeit-/Energie-Einheiten, Vergleichsgrößen) zulässig.

Definition 2.2 (Numerisches Verifikationsprotokoll (Pflicht-Logging)). Für jedes betrachtete Objekt $A^{(L)}$ (Matrix oder Skalar) wird für $L = L_{\text{int}} + 1, L_{\text{int}} + 2, \dots$ die *Stabilitätsabweichung* *Hinweis:* In Def. 2.3 ist $L_0(A)$ der minimale (ggf. undefinierte) Startindex eines akzeptierten Stabilitätsfensters für eine konkrete Observable A . Zusätzlich wird ein globaler Worst-Case-Index L_0^{glob} als $\max_{A \in \mathcal{A}_{\log}} L_0(A)$ (bzw. $\perp$) berichtet. Keiner dieser Werte ist vorab festzusetzen.

$$\Delta_L(A) := \frac{\|A^{(L)} - A^{(L-1)}\|_F}{\max\{1, \|A^{(L)}\|_F\}}$$

geloggt (bei Skalaren: Betrag statt Frobeniusnorm). Zusätzlich werden für Matrizen geloggt:

$$\rho_L := \rho(A^{(L)}), \quad \delta_L^{\text{spec}} := \max_i |\lambda_i(A^{(L)}) - \lambda_i(A^{(L-1)})|$$

(falls Spektren ausgewertet werden). Physikalische Schlussfolgerungen dürfen nur auf Bereichen basieren, in denen $\Delta_L(A)$ über mehrere aufeinanderfolgende L unter einem vordefinierten Schwellwert liegt (*Empirie-Policy*, nicht Modellparameter).

Definition 2.3 (Akzeptanzkriterien und numerische Gates (Empirie-Policy; normativ)). Die folgenden Schwellen sind *normative Default-Werte* für die vollautomatische Verifikation. Sie sind keine physikalischen Modellparameter, sondern Teil der Implementations- und Vergleichspolicy (Pfeiler A). Wir fixieren

$$\begin{aligned} \tau_{\text{rel}} &:= 10^4 \varepsilon_{\text{floor}}, & \tau_{\text{rel,warn}} &:= 10 \tau_{\text{rel}}, & \tau_{\text{spec}} &:= 10^4 \varepsilon_{\text{floor}}, & k_{\text{stable}} &:= 3, \\ \kappa_{\text{raw,thr}} &:= 10^{-1}, & p_{\text{fb,max}} &:= 0.05, & p_{\text{fb,hard,max}} &:= 0.01, & p_{\text{mreg,warn}} &:= 0.01, & p_{\text{mreg,max}} &:= 0.05, \end{aligned}$$

Konvergenz-Akzeptanz (operational). Für jede geloggte Observable $A^{(L)}$ (z. B. $\Lambda_{n,B}^{(L)}$, $\Psi_{n,B}^{(L)}$, $d_n^{(L)}$) definieren wir den (ggf. undefinierten) minimalen Fensterstartindex

$$L_0(A) := \min \left\{ L \in \{L_{\text{int}}+1, \dots, L_{\text{max}}-k_{\text{stable}}+1\} : \forall j \in \{0, \dots, k_{\text{stable}}-1\} : \Delta_{L+j}(A) \leq \tau_{\text{rel}} \wedge (\text{falls ausgewertet}) \right\}$$

Existiert kein solches L , setzen wir $L_0(A) := \perp$. *Stabilität ist akzeptiert* genau dann, wenn $L_0(A) \neq \perp$. Der Wert $L_0(A)$ (bzw. $\perp$) ist verpflichtend zu loggen (Audit-Trail). Ohne akzeptiertes Fenster sind Grenzwertinterpretationen (H1–H3) als *nicht verifiziert* zu markieren.

Globaler Worst-Case-Fensterstart. Sei $\mathcal{A}_{\text{log}}$ die im jeweiligen Run tatsächlich geloggte Menge von Observablen $A^{(L)}$ im Sinne von Def. 2.2 (für die also $\Delta_L(A)$ berechnet und protokolliert wird). Wir definieren den globalen (ggf. undefinierten) Startindex

$$L_0^{\text{glob}} := \begin{cases} \max_{A \in \mathcal{A}_{\text{log}}} L_0(A), & \text{falls } \forall A \in \mathcal{A}_{\text{log}} : L_0(A) \neq \perp, \\ \perp, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Wert L_0^{glob} (bzw. $\perp$) ist verpflichtend zu loggen (Audit-Trail). Ein Run ist im Sinne der Level-Stabilität *global akzeptiert* genau dann, wenn $L_0^{\text{glob}} \neq \perp$; andernfalls sind Grenzwertinterpretationen (H1–H3) als *nicht verifiziert* zu markieren.

Strenge vs. schwache Stabilität. Falls lediglich $\Delta_L(A) \leq \tau_{\text{rel,warn}}$ (aber nicht $\leq \tau_{\text{rel}}$) über ein Fenster erfüllt ist, ist dies als `WARN(WEAK_CONVERGENCE)` zu loggen (empirisch zu kalibrieren).

Fallback-Gate (Soft-Fallback-Monitoring). Sei $f(n, w) \in \{0, 1\}$ das pro Zelle geloggte Fallback-Flag (Def. 4.2) und sei $\mathcal{W}$ die endliche Menge der im jeweiligen Run betrachteten Zellen (z. B. alle Wörter w mit $1 \leq |w| \leq K_{\text{max}}$, gemäß der kanonischen Wortordnung), mit $N_W := |\mathcal{W}|$. Wir definieren die Gesamtrate

$$p_{\text{fb}}(n) := \frac{1}{N_W} \sum_{w \in \mathcal{W}} f(n, w),$$

sowie die *Hard/Soft-Raten* (Def. 4.2)

$$p_{\text{fb,hard}}(n) := \frac{1}{N_W} \sum_{w \in \mathcal{W}} f_{\text{hard}}(n, w), \quad p_{\text{fb,soft}}(n) := \frac{1}{N_W} \sum_{w \in \mathcal{W}} f_{\text{soft}}(n, w).$$

Gates: Wenn $p_{\text{fb}}(n) > p_{\text{fb,max}}$, ist der Run ab Schritt n als `RUN_INVALID(FALLBACK_RATE)` zu markieren. Wenn zusätzlich $p_{\text{fb,hard}}(n) > p_{\text{fb,hard,max}}$, ist der Run als `RUN_INVALID(HARD_FAIL_RATE)` zu markieren (Verdacht auf echte Strukturprobleme, z. B. Disconnection/Singularität, nicht bloß “kleines Mismatch”). Die Definition bleibt total, indem in `RUN_INVALID`-Fällen deterministisch $\Delta_n(e) \equiv 0$ für alle e gesetzt wird (keine weitere geometrische Aktualisierung), und der Zustand ρ wird nur noch vorwärts propagiert.

Regularisierungs- und Konditions-Gates. Für jede relevante Solve/RegSPD-Anwendung sind $m_{\text{chol}}(A)$, $m(A)$ und $\hat{\kappa}(\text{Reg}_{\text{SPD}}(A))$ zu loggen. Insbesondere ist zu zählen, wie oft die maximale Eskalationsstufe erreicht wird: Sei $\mathcal{A}(n)$ die (deterministisch geordnete) Menge aller Matrizenblöcke, die in Schritt n reguliert/gelöst wurden, mit $N_A := |\mathcal{A}(n)|$. Definiere die Rate

$$p_{\text{mreg}}(n) := \frac{1}{N_A} \sum_{A \in \mathcal{A}(n)} \mathbf{1}\{m(A) = m_{\text{reg,max}}\}.$$

Wenn $p_{\text{mreg}}(n) > p_{\text{mreg,warn}}$, ist dies als `WARN(REG_ESCALATION)` zu markieren (numerisch fragil; in float64 kann bei großen Konditionszahlen effektiv Präzision verloren gehen). Wenn $p_{\text{mreg}}(n) > p_{\text{mreg,max}}$, ist der Run als `RUN_INVALID(REG_ESCALATION_RATE)` zu markieren.

λ -Gate. Wenn die deterministische Bracketing/Bisektion das Budget $N_{\lambda, \max}$ ausschöpft, ist dies als `WARN(LAMBDA_BUDGET)` zu loggen; die Definition bleibt total über den vorhandenen Fallback $\lambda_n := 0$.

Bemerkung 2.2 (Hard-Fallback-Forensik (normativ)). Ein Soft-Fallback kann echte Struktur von Implementations-/Numerikproblemen überdecken. Daher sind im Report *getrennt* zu loggen: (i) Hard-Fallback-Rate $p_{\text{fb,hard}}$ (`valid=0` durch Solve-Fail), (ii) `COND_FAIL`-Rate $p_{\text{cond_fail}}$ (Konditions-Gate), (iii) Soft-Fallback-Rate $p_{\text{fb,soft}}$ (z. B. η_{soft} -Dämpfung bei gültiger Solve-Policy), und zusätzlich (iv) die bedingte Rate

$$p_{\text{fb,hard}}^{(\kappa)} := \Pr[\text{Hard-Fallback} \wedge \hat{\kappa} > \kappa_{\text{susp}}], \quad \kappa_{\text{susp}} := 10^{10}.$$

Interpretationsregel: Wenn $p_{\text{fb,hard}}^{(\kappa)} > 0$, ist dies als `SUSPICIOUS` zu markieren und Grenzwertinterpretationen sind bis zur Fehlerklärung ausgeschlossen.

Definition 2.4 (Batch-Run-Artefakte (optional; Empirie-Policy; normativ)). Ein *Batch-Run* ist eine endliche, geordnete Menge von Subsystemadressen

$$\mathcal{W}_{\text{batch}} := (w^{(1)}, \dots, w^{(N)}) \subseteq \mathcal{W}_{\leq K_{\max}}$$

(siehe Hinweis “Subsystem-Familie und Rechenbudget”), auf der die Pipeline (Seed $\rightarrow$ Kanal/Mismatch $\rightarrow$ optional Update) *wiederholt* ausgeführt wird. Die Wahl von $\mathcal{W}_{\text{batch}}$ ist *kein* Modellparameter, sondern reine Empirie-/UI-Policy und muss deterministisch im Audit-Trail persistiert werden.

Kanonische Ordnung. Falls $\mathcal{W}_{\text{batch}}$ nicht explizit in geordneter Form vorgegeben ist, wird eine kanonische Ordnung verwendet: Sortiere nach Wortlänge $|w|$ (Level) und innerhalb gleicher Länge lexikographisch (ASCII), d. h. nach $(|w|, \text{lex}(w))$. Die implementierte Ordnung ist als String im Audit-Trail zu protokollieren.

Mindest-Artefakte. Für jeden Batch-Run sind mindestens zwei Dateien zu erzeugen:

1. `batch_cells.json` (normative Referenz; vollständig),
2. `batch_cells.csv` (flache Tabelle; UI/Analyse-freundlich).

Beide Dateien müssen (a) inhaltlich konsistent sein und (b) per SHA256 ghasht und im Audit-Trail referenziert werden (siehe unten).

Schema: `batch_cells.json` (pflicht). Die JSON-Datei ist UTF-8-kodiert und besitzt mindestens die folgenden Top-Level-Keys:

- `schema_id` (String), `schema_version` (String), `definition_id` (String),
- `env_lock_sha256` (String), `run_id` (String), `timestamp_utc` (String, ISO 8601),
- `L_max` (int), `K_max` (int), `mode` ("general" oder `special`),
- `ordering` (String; kanonische Ordnungsbeschreibung),
- `cells` (Array von Objekten; ein Objekt pro $w^{(i)}$),
- `file_hashes` (Objekt mit SHA256 für JSON/CSV).

Jedes `cells[i]`-Objekt enthält mindestens:

- `idx` (int, 1-basiert), `k` (int, $k = |w|$), `addr_str` (String),

- `card_V` (int) und `card_E` (int) für $(V_w^{(k)}, E_w^{(k)})$,
- `seed` (Objekt; mindestens Hash/Referenz auf $\Psi_{n,B}$ bzw. zugehörige Randantworten),
- `mismatch` (Objekt; mindestens κ -Werte und Normen des Mismatch/Updates),
- `gates` (Objekt; mindestens `valid`, `solve_fail`, `cond_fail`, `fb_soft`, `fb_hard`, sowie die in Definition 2.3 referenzierten Stufen-/Zählerwerte, sofern berechnet),
- `timings` (Objekt; mindestens `wall_ms`).

Hinweis: Weitere Felder sind erlaubt, dürfen aber die Pflichtfelder nicht umdefinieren.

Schema: `batch_cells.csv` (pflicht). Die CSV-Datei ist UTF-8-kodiert, mit Header-Zeile und Komma als Trenner. Jede Zeile entspricht genau einem $w^{(i)}$ in derselben Ordnung wie `cells`. Pflichtspalten (mindestens):

`idx,k,addr_str,card_V,card_E,kappa,delta_inf,valid,solve_fail,cond_fail,fb_soft,fb_hard,wall`

Dabei ist `delta_inf` eine deterministisch definierte ℓ_∞ -Norm des zentralen Update-Objekts (z. B. $\|\Delta_0\|_\infty$ oder, falls nicht verfügbar, $\|\log(c_1/c_0)\|_\infty$ gemäß der jeweils implementierten Pipeline) und muss im JSON explizit referenziert werden.

Hashing und Audit-Trail (pflicht). Für jede erzeugte Batch-Datei ist der SHA256-Hash über die *Bytefolge* der Datei zu berechnen und als `file_hashes` in `batch_cells.json` zu speichern. Dieselben Hashes sind zusätzlich im Audit-Trail (`run_meta/Report` zusammen mit `ENV_LOCK`) zu persistieren. In D0 müssen Hashes bit-identisch reproduzierbar sein; in D1 muss die *Inhalts-äquivalenz* (numerische Toleranzen, identische Ordnung, identische Gate-Logik) nachweisbar sein.

Determinismus- und UI-Regel. Die Auswahl/Filterung von $\mathcal{W}_{\text{batch}}$ über GUI/CLI darf die numerischen Resultate nicht verändern; sie bestimmt ausschließlich, *welche* w ausgewertet werden. Alle Eingaben, die $\mathcal{W}_{\text{batch}}$ festlegen, sind vollständig zu serialisieren (Liste der `addr_str` in Batch-Reihenfolge).

Definition 2.5 (Grenzwertinterpretation (operational; normativ)). Die Hypothesen **H1–H3** dürfen *nur dann* als stützende Grundlage für Aussagen über einen (induktiven) Grenzwert $L_{\max} \rightarrow \infty$ herangezogen werden, wenn die folgenden *numerischen Akzeptanzkriterien* gleichzeitig erfüllt sind:

- (G1) (**L-Stabilität**) Es existiert ein $L_\star$ und ein $K \geq 3$, so dass für alle $L \geq L_\star$ die Abweichungen $\Delta_L(A)$ aus Def. 2.2 für K aufeinanderfolgende Level-Schritte unterhalb der in Def. 2.3 fixierten Schwellen liegen (PASS oder WARN, je nach Stufe).
- (G2) (**Regularisierungs-Sensitivität**) Für die in Schritt n verwendeten Kernobjekte $(\Lambda_{n,B}, \text{Kanäle } \Phi_{n,B}, \text{Widerstandsmetriken } d_n)$ ist zusätzlich ein deterministischer *Zwei-Punkt-Sensitivitätslauf* durchzuführen, in dem $\varepsilon_{\text{floor}}$ durch $s\varepsilon_{\text{floor}}$ mit $s \in \{1, 2\}$ ersetzt wird (*ohne* Änderung der übrigen Policy). Die resultierenden Abweichungen müssen D1-äquivalent sein, d. h. sie dürfen die D1-Toleranzen aus Def. 2.3 nicht überschreiten.
- (G3) (**Artefaktkontrolle**) Tritt `COND_FAIL` oder Hard-Fallback mit Rate oberhalb der normativen Gates auf, sind Grenzwertinterpretationen *ausgeschlossen*, selbst wenn einzelne $\Delta_L(A)$ klein sind.

Proposition 2.1 (DtN/Kron als Schur-Komplement und Kontinuität in Leitwerten). *Fixiere einen endlichen Approximanten $G_L = (V_L, E_L)$, einen Support $B \subset V_L$ und die in Def. 2.9 fixierte Solve-Policy (Def. 2.9) und SPD-Regularisierung (Def. 2.8); insbesondere ist $\text{Reg}_{\text{SPD}}(\cdot)$ mit deterministischem $\delta_{\text{SPD}}(\cdot) > 0$ als Funktion des Blocks festgelegt. Dann ist der so definierte DtN-Operator $\Lambda_B(L_n)$ eine rationale (insbesondere lokal Lipschitz-stetige) Funktion der Leitwerte $c : E_L \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ in jeder Region, in der die Solve-Policy `valid=1` liefert.*

Beweisskizze. Für feste Blockzerlegung $V_L = B \sqcup \bar{B}$ gilt formal (Schur-Komplement) $\Lambda_B = (L_n)_{BB} - (L_n)_{B\bar{B}} (L_n)_{\bar{B}\bar{B}}^{-1} (L_n)_{\bar{B}B}$. Die Spezifikation realisiert $(\cdot)^{-1}$ deterministisch als $\text{solve}(\text{Reg}_{\text{SPD}}(S), \cdot)$ auf dem jeweiligen Block S (äquivalent: über explizite Block-Regularisierung $S_{\text{reg}} := \text{Reg}_{\text{SPD}}(S)$). Damit ist Λ_B als Kombination von Matrixprodukten und Inversionen eine rationale Abbildung in den Einträgen von L_n , und die Abbildung ist auf jeder Menge mit uniformer Konditionskontrolle lokal Lipschitz (Resolventen-Identität). $\square$

Proposition 2.2 (Grenzwertpfad im IDEAL-Trunk (bekannte Resultate)). *Für SG/ST-Idealtrunks ($c \equiv 1$ auf allen Kanten der Approximanten) existiert ein wohldefinierter Grenzwert der zugehörigen Widerstands-/Dirichlet-Formen im Sinn von Kigamis “resistance forms”. Insbesondere konvergieren (nach Standard-Renormierung) die diskreten Energieformen und die zugehörigen Laplacians auf G_L zu einem Grenzoperator auf dem fraktalen Limitraum; vgl. Kigami und Strichartz.[1, 2, 3]*

Beweisskizze. Dies folgt aus der Theorie selbstähnlicher Widerstandsformen und der Konstruktion des Laplace-Operators über die Dirichlet-Form auf p.c.f.-Fraktalen (SG/ST). Die Approximanten bilden ein projektives System, und die renormierten Energien sind kompatibel und konvergieren zu einer eindeutigen Grenzform. $\square$

Bemerkung 2.3 (Status im REAL-Fall). Für deformierte REAL-Leitwerte c_n ist Prop. 2.2 nicht direkt anwendbar. Diese Spezifikation ersetzt einen Beweis durch die Hypothesen H1–H3 *plus* die operativen Akzeptanzkriterien (Def. 2.5); d. h. Grenzwertinterpretationen sind nur als *empirisch gestützte Aussagen* im Sinne von Pfeiler A zulässig.

Definition 2.6 (Sensitivitäts- und Artefaktprotokoll (Empirie-Policy; normativ)). Um numerisch induzierte Nichttrivialität von struktureller Nichttrivialität zu trennen, ist für jeden “Claim”-Run (jede betrachtete Konfiguration) mindestens die folgende deterministische Sensitivitätsmatrix auszuführen:

(SEN-1) **$\varepsilon_{\text{floor}}$ -Sweep:** $s_\varepsilon \in \{1/2, 1, 2\}$.

(SEN-2) **RegSPD-Eskalations-Sweep:** β_{reg} wird durch $s_\beta \beta_{\text{reg}}$ mit $s_\beta \in \{1/2, 1, 2\}$ ersetzt (bei unverändertem M_{reg}).

(SEN-3) **Solver-Pfad-Sweep (deterministisch):** Falls sowohl Cholesky als auch LU in solve verfügbar sind, wird ein zusätzlicher Lauf erzwungen, der *immer* LU verwendet (`SOLVE_FORCE_LU=1`), um Pivot-Sensitivität zu testen.

(SEN-4) **BLAS/LAPACK-Backend:** Wenn im ENV_LOCK-Ökosystem mehrere Backends bereitgestellt werden, ist mindestens ein Vergleich *unter gepinnten Images* vorzunehmen. Ist dies nicht möglich, muss im Report explizit `BACKEND_SENSITIVITY=UNTESTED` stehen.

Akzeptanzregel: Ein beobachtetes Muster gilt als *strukturell* (nicht rein numerisch), wenn es unter (SEN-1)–(SEN-3) D1-stabil ist und die Fallback-/COND_FAIL-Raten unterhalb der normativen Gates bleiben.

Regularisierung als zweiparametriger Grenzprozess (Level und Numerik). Die Regularisierungen $\text{Reg}_{\text{SPD}}(\cdot)$ (Solve-Stabilität) und die Choi-Regularisierung ε (relative Entropie) sind *rein numerische* Konstrukte. Mathematisch entspricht der ideale Grenzfall einem *zweiparametrischen Limes*

$$L_{\max} \uparrow \infty, \quad \varepsilon_{\max} \downarrow 0,$$

so dass insbesondere $\delta_{\text{SPD}}(A) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_{\max}} \|A\|)$ relativ klein bleibt. Operational wird dieser Grenzprozess nicht vorausgesetzt, sondern durch Stabilitäts- und Sensitivitätsprüfungen ersetzt: Runs mit unterschiedlichen Numerik-Policies (z. B. float64 vs. long double / mp) müssen im stabilen Bereich zu konsistenten Observablen führen (Pflicht-Logging gemäß Definition 2.2).

Determinismus-Härtung, ENV_LOCK und Parallelität (normativ). Der Begriff “deterministisch” wird in dieser Spezifikation in zwei Stufen fixiert:

D0 *Bit-identisch* unter identischem **ENV_LOCK** (gleiche OS/Arch, Python, NumPy/SciPy, BLAS/LAPACK/SuiteSparse-Versionen, (D0 ist in der Praxis nur unter einem normativ fixierten Container-Image/ENV_LOCK-Manifest erreichbar; wenn kein `container_digest` und keine vollständig gepinnte Toolchain vorliegt, ist D0 als *nicht erfüllt* zu markieren und D1 zu verwenden). Threading-FLAGS).

D1 *Numerisch äquivalent* über Plattformen hinweg (definierte relative/absolute Toleranzen), falls D0 nicht erreichbar ist.

Definition 2.7 (ENV_LOCK-Manifest (normativ; Voraussetzung für D0)). Ein ENV_LOCK-Manifest ist eine *unveränderliche* Textdatei (YAML oder JSON), die jeden Run begleitet und die *numerische Toolchain* vollständig fixiert. Ein Run darf **nur dann** als **D0 (bit-identisch)** deklariert werden, wenn das Manifest mindestens die folgenden Felder enthält:

- `container_image_digest`: OCI-Image-Digest im Format `sha256:<HEX>` (oder explizit null mit Grund).
- `os`: Distribution, Kernel, libc (falls relevant), CPU-Architektur.
- `python`: Version inkl. Build-Info.
- `packages`: Versionen von `numpy`, `scipy` (und ggf. `suitesparse`/`cholmod` falls genutzt).
- `blas_lapack`: Backend (OpenBLAS/MKL/Accelerate/Reference), Versionsstring, Threading-Flags.
- `threading`: `OMP_NUM_THREADS`, `OPENBLAS_NUM_THREADS`, `MKL_NUM_THREADS` (alle 1).
- `policy_hash`: Hash der numerischen Policy (inkl. $\varepsilon_{\text{floor}}$ -Regel, Reg_{SPD} /Solve, expm_{det} / $\log_{\text{det}}$).
- `code_revision`: Git-Commit (oder inhaltlicher Hash) der Spezifikation/Implementierung.

Normativ: Fehlt `container_image_digest` oder ist die BLAS/LAPACK-Toolchain nicht fixiert, ist D0 als *nicht erfüllt* zu markieren und ausschließlich D1 (toleranz-invariant) zu berichten.

Beispiel (Template; Digest muss durch den realen Wert ersetzt werden):

```
env_lock:
  container_image_digest: "sha256:<REPLACE_WITH_DIGEST>"
  os: "linux; kernel=<...>; arch=x86_64; libc=<...>"
  python: "3.11.<...>"
  packages:
    numpy: "<...>"
```

```

    scipy: "<...>"
blas_lapack:
    backend: "<OpenBLAS|MKL|...>"
    version: "<...>"
threading:
    OMP_NUM_THREADS: 1
    OPENBLAS_NUM_THREADS: 1
    MKL_NUM_THREADS: 1
policy_hash: "<...>"
code_revision: "<git-commit-or-hash>"

```

Normative Mindestanforderungen:

$$\text{OMP_NUM_THREADS} = \text{OPENBLAS_NUM_THREADS} = \text{MKL_NUM_THREADS} = 1,$$

und alle Reduktionen über Kanten/Vertices werden in *kanonischer lexikographischer Ordnung* durchgeführt (Kahan-Summen, keine atomaren Parallel-Reduktionen). Parallelität ist nur zulässig als “map” über unabhängige Einheiten (z. B. Zellen w) mit deterministischer *serieller* Aggregation in kanonischer Reihenfolge.

Deterministische Solve-Semantik und SPD-Regularisierung (normativ).

Definition 2.8 (Symmetrisierung, konditionskontrollierte SPD-Regularisierung (normativ)). Für jede quadratische Matrix A definieren wir zunächst die kanonische Symmetrisierung und eine *numerische Basisskala* (IEEE float64):

$$\text{sym}(A) := \frac{1}{2}(A + A^\top), \quad \delta_0(A) := \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, \|\text{sym}(A)\|_F\}.$$

Fixiere die *Reg-Eskalation* (rein numerische Policy; keine Modellparameter)

$$\beta_{\text{reg}} := 10, \quad M_{\text{reg}} := 8, \quad \kappa_{\text{max}} := 10^{12}.$$

Bemerkung 2.4 (Numerische Bedeutung von κ_{max} (float64)). In IEEE float64 bedeutet eine effektive Konditionszahl in der Größenordnung $\kappa \sim 10^{12}$ typischerweise, dass (grob) mehrere Dezimalstellen an effektiver Genauigkeit verloren gehen (Rundungsfehlerverstärkung). Daher ist häufiges Erreichen von $m(A) = M_{\text{reg}}$ bzw. von großen $\hat{\kappa}$ nicht als “OK”, sondern als *numerische Fragilität* zu interpretieren und unterliegt den Gates in Def. 2.3.

Deterministischer Konditions-Proxy (Gershgorin). Für eine symmetrische Matrix M setze

$$g_{\min}(M) := \min_i \left(M_{ii} - \sum_{j \neq i} |M_{ij}| \right), \quad g_{\max}(M) := \max_i \left(M_{ii} + \sum_{j \neq i} |M_{ij}| \right),$$

und definiere die deterministischen Schranken

$$\hat{\lambda}_{\min}(M) := \max\{g_{\min}(M), \varepsilon_{\text{floor}}\}, \quad \hat{\lambda}_{\max}(M) := \max\{g_{\max}(M), \hat{\lambda}_{\min}(M)\}, \quad \hat{\kappa}(M) := \hat{\lambda}_{\max}(M) / \hat{\lambda}_{\min}(M)$$

Dabei ist $\hat{\kappa}$ eine *obere* (pessimistische) Konditionsschätzung, aber vollständig deterministisch (keine spektralen Routinen erforderlich).

Eskalationsregel. Sei $\text{cholOK}(M) \in \{0, 1\}$ der deterministische Prädikatwert “Cholesky(M) gelingt in IEEE float64 unter dieser Policy” (dieselbe Policy wie in Definition 2.9). Für $m \in \{0, \dots, M_{\text{reg}}\}$ definieren wir die Kandidaten

$$\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A) := \text{sym}(A) + \beta_{\text{reg}}^m \delta_0(A) I.$$

Definiere zuerst die kleinste Stufe, auf der Cholesky gelingt,

$$m_{\text{chol}}(A) := \min\{m \in \{0, \dots, M_{\text{reg}}\} : \text{cholOK}(\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A)) = 1\},$$

und falls die Menge leer ist, setze deterministisch $m_{\text{chol}}(A) := M_{\text{reg}}$. Anschließend erzwingen wir *konditionskontrolliert* (sofern möglich)

$$m(A) := \min\{m \in \{m_{\text{chol}}(A), \dots, M_{\text{reg}}\} : \hat{\kappa}(\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A)) \leq \kappa_{\text{max}}\},$$

und falls die Menge leer ist, setze deterministisch $m(A) := M_{\text{reg}}$ und markiere den Block als **COND_FAIL**, falls $\hat{\kappa}(\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(M_{\text{reg}})}(A)) > \kappa_{\text{max}}$. In einem **COND_FAIL**-Fall wird *nicht* automatisch **valid=0** gesetzt. Stattdessen ist **COND_FAIL** als separates Konditions-Gate/Report-Feld zu führen (äquivalent: **cond_ok=0**), da die DtN/Kron-Reduktion in solchen Fällen numerisch dominiert werden kann. Setze schließlich

$$\delta_{\text{SPD}}(A) := \beta_{\text{reg}}^{m(A)} \delta_0(A), \quad \text{Reg}_{\text{SPD}}(A) := \text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m(A))}(A) = \text{sym}(A) + \delta_{\text{SPD}}(A)I.$$

$\text{Reg}_{\text{SPD}}(A)$ ist eine rein numerische Stabilisierung (Tikhonov-Jitter) in IEEE float64; sie ist kein physikalischer Parameter. Die Stufen $m_{\text{chol}}(A)$ und $m(A)$ sowie $\hat{\kappa}(\text{Reg}_{\text{SPD}}(A))$ sind verpflichtend zu loggen (siehe Def. 2.3).

Definition 2.9 (Solve (normativ; ohne impliziten Jitter)). $\text{solve}(A, B)$ bezeichnet die deterministische Lösung X des linearen Gleichungssystems

$$AX = B,$$

unter folgender normativer Solver-Policy (keine implizite Regularisierung, keine implizite Symmetrisierung):

- (S1) Falls A exakt symmetrisch ist ($A = A^\top$ in der verwendeten Gleitkommadarstellung) und $\text{cholOK}(A) = 1$, wird ausschließlich eine deterministische Cholesky-Faktorisierung verwendet.
- (S2) Andernfalls wird ausschließlich eine deterministische direkte LU-Faktorisierung mit (partiellem) Pivoting verwendet. Tie-breaks bei identischen Pivot-Kandidaten werden deterministisch durch kleinsten Index aufgelöst.

Die Routine gibt deterministisch entweder (i) ein X zurück (Status “ok”) oder (ii) den Status “fail” (z. B. singular, numerisch instabil, Disconnection in einem SPD-Kontext). In allen Modell-Definitionen wird ein Fail-Fall *nicht* durch Heuristiken innerhalb von solve kompensiert, sondern über explizite Validity-/Fallback-Regeln (z. B. $\text{valid}(\cdot)$, $\text{valid}_{\text{glob}}(\cdot)$, $\kappa := 0$) behandelt.

Insbesondere: Regularisierungen der Form $A \mapsto A + \delta I$ sind in dieser Spezifikation stets explizit über $\text{Reg}_{\text{SPD}}(\cdot)$ (bzw. eine explizit definierte δ) vorzunehmen und sind **nicht** Teil von solve .

Bemerkung 2.5 (Konsequenz: kein “doppelter Jitter”). Alle DtN/Kron-Definitionen und die Widerstandsmetrik lösen ausschließlich auf deterministisch regularisierten Blöcken, d. h. von der Form $\text{solve}(\text{Reg}_{\text{SPD}}(\cdot), \cdot)$ oder äquivalent mit expliziten $(\cdot)_{\text{reg}}$ -Blöcken. Damit ist ausgeschlossen, dass in Formeln ein “doppelter Jitter” (innen und außen) entstehen kann.

Definition 2.10 (Konditionsmonitoring (normativ; deterministisch)). Für eine symmetrische Matrix M definieren wir die deterministischen Schranken

$$\lambda_{\min}^G(M) := \min_i \left(M_{ii} - \sum_{j \neq i} |M_{ij}| \right) \quad (\text{Gershgorin-Untergrenze}), \quad \lambda_{\max}^F(M) := \|M\|_F.$$

Für den in dieser Spezifikation verwendeten regularisierten Block $M_{\text{reg}} := \text{Reg}_{\text{SPD}}(M)$ definieren wir die *Konditions-Proxymetrik*

$$\hat{\kappa}(M_{\text{reg}}) := \frac{\lambda_{\max}^F(M_{\text{reg}})}{\max\{\varepsilon_{\text{floor}}, \lambda_{\min}^G(M_{\text{reg}})\}}.$$

$\hat{\kappa}$ ist eine deterministische Monitoring-Größe (kein Modellparameter). Sie wird für alle Solve-/DtN-Blöcke geloggt, zusammen mit der Reg-Eskalationsstufe $m(\cdot)$ aus Definition 2.8.

Deterministische Policy für Matrixfunktionen $\exp$ und $\log$ (normativ). Diese Spezifikation verwendet Matrixexponentialfunktionen (für CPTP-Zeitschritte) und Matrixlogarithmen (für die quantum relative Entropie). Um Implementationen vergleichbar zu halten, fixieren wir Referenz-Operationen.

Definition 2.11 (Deterministisches Matrix-exp). Für eine reelle Matrix A ist $\text{expm}_{\text{det}}(A)$ die Ausgabe des scaling-and-squaring-Algorithmus mit Padé-Approximant vom Grad (13, 13) gemäß Higham.[12] Die Wahl des Scaling-Exponenten s erfolgt deterministisch über die $\|\cdot\|_1$ -Norm und die publizierte Schranke θ_{13} . Alle internen linearen Gleichungssysteme werden ausschließlich via $\text{solve}(\cdot, \cdot)$ (Definition 2.9) gelöst.

Wenn expm_{det} in dieser Spezifikation auf einen Superoperator angewandt wird, ist damit stets expm_{det} der kanonischen Liouville-Matrixdarstellung gemeint (vgl. Konvention in Abschnitt 4.8).

Definition 2.12 (Deterministischer Matrix-log für Dichtematrizen). Sei $\rho \succeq 0$ hermitesch mit $\text{Tr}(\rho) = 1$. Definiere $\rho_{\text{H}} := \frac{1}{2}(\rho + \rho^\dagger)$. Wir definieren $\log_{\text{det}}(\rho)$ über eine deterministisch kanonisierte Spektralzerlegung mit expliziter Behandlung (nah-)entarteter Eigenräume:

1. Berechne deterministisch Eigenwerte/Eigenvektoren von ρ_{H} (Hermitesch-Eigensolver), sortiere die Eigenwerte *absteigend*.
2. Fixiere eine Entartungs-Schwelle

$$\tau_{\text{deg}} := 64 \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, \|\rho_{\text{H}}\|_2\}.$$

Partitioniere die sortierte Eigenwertliste in Cluster, in denen jeweils $|\lambda_i - \lambda_j| \leq \tau_{\text{deg}}$ gilt.

3. Für jeden Cluster C mit zugehörigem Eigenraum $\mathcal{E}_C$ wähle eine *kanonische* Orthonormalbasis wie folgt: Sei P_C der orthogonale Projektor auf $\mathcal{E}_C$. Für die Standardbasisvektoren $e_1, e_2, \dots$ setze $w_i := P_C e_i$ und verwende die nichtverschwindenden w_i in aufsteigender i -Reihenfolge als Input für ein deterministisches modifiziertes Gram-Schmidt, bis $\dim(\mathcal{E}_C)$ Vektoren erzeugt sind. Falls dadurch (numerisch) nicht vollständig aufgefüllt werden kann, werden die verbleibenden Basisvektoren deterministisch aus den vom Hermitesch-Solver gelieferten Eigenvektoren ergänzt (in der dortigen Reihenfolge). Anschließend wird für jeden Basisvektor die globale Phase/Signatur kanonisch durch “erste nichtverschwindende Komponente positiv” fixiert.
4. Setze $\lambda_k^{\text{clip}} := \max\{\lambda_k, \varepsilon_{\text{floor}}\}$ und definiere

$$\log_{\text{det}}(\rho) := \sum_k \log(\lambda_k^{\text{clip}}) |v_k\rangle\langle v_k|.$$

Diese Policy garantiert kanonische Basiswahl auch bei (nahezu) entarteten Eigenwerten und verhindert plattformabhängige Rotationen innerhalb entarteter Unterräume als versteckte Nicht-Determinismen.

Bemerkung 2.6 (Totalität durch Regularisierung). In der Mismatch-Definition wird $J_\varepsilon(\Phi)$ durch Mischung mit I/d^2 strikt positiv definit gemacht, so dass $S(\rho\|\sigma)$ wohldefiniert ist und $\log_{\det}$ keine Divergenzen erzeugt.

Die Randenergie-Summe $\mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}}$ ist in Pfeiler A ausschließlich als *globaler Ziel-Constraint auf dem IDEAL-Rand* B_0 formuliert: Wird λ_n per Bracketing+Bisektion gefunden, so wird die Zielgleichung exakt (bis zur Numerik-Policy) erfüllt. Schlägt das Verfahren deterministisch fehl, wird $\lambda_n := 0$ gesetzt und der Schritt als Gate-/Report-Feld entsprechend markiert (dann ist die Erhaltung nicht garantiert). **Wichtig:** Für Subsysteme/Zellen w mit lokalem Rand B_w wird *keine* analoge Randenergie-Erhaltung postuliert; die Individuation im Allgemeinen Fall erfolgt dort ausschließlich über Seed-/Umwelt-Reduktion gemäß Abschnitt 1 (kein zusätzlicher Symmetrie-Constraint am lokalen Rand). Mit der Fixierung aller Schalter/Defaults (insbesondere d_p) und der deterministischen Tie-break-Regeln ist die Dynamik vollständig deterministisch.

2.2 Parameterreduktion (kanonisch)

Fixiere $L_{\max}$ und setze

$$L_{\text{int}} := 1, \quad K_{\max} := \max\{L_{\max} - 1, 0\}.$$

Für $K_{\max} \geq 1$ definiere Skalenweights

$$\alpha_k := \frac{r_{\star}^k}{\sum_{j=1}^{K_{\max}} r_{\star}^j}, \quad k = 1, \dots, K_{\max},$$

und für $K_{\max} = 0$ ist die Summe über k leer (so dass nur der Corner–Corner-Fallback wirken kann, falls $E_{\emptyset} \neq \emptyset$).

2.3 REAL-Zustand (Leitwerte), Laplacian, Energie

Ein REAL-Zustand zur Zeit $n \in \mathbb{N}_0$ ist eine Leitwertfunktion

$$c_n : E \rightarrow (0, \infty).$$

Initialisierung. Setze deterministisch $c_0(e) := 1$ für alle $e \in E$.

Definiere die gewichtete (loop-less) Laplacian $L_n \in \mathbb{R}^{|V| \times |V|}$ durch

$$(L_n)_{xy} := \begin{cases} -c_n(\{x, y\}), & x \neq y \text{ und } \{x, y\} \in E, \\ 0, & x \neq y \text{ und } \{x, y\} \notin E, \\ \sum_{z: \{x, z\} \in E} c_n(\{x, z\}), & x = y. \end{cases}$$

Die zugehörige Dirichlet-Energie ist für $f : V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{E}_n(f) := \frac{1}{2} \sum_{\{x, y\} \in E} c_n(\{x, y\}) (f(x) - f(y))^2 = \frac{1}{2} f^\top L_n f.$$

[4, 15]

2.4 prä-OQS-Hilbertraum aus Dirichlet-Form; intrinsischer System/Umwelt-Split (Rand vs. Zellinneres)

Dirichlet-Form (zeitabhängig über c_n). Für den (zeitabhängigen) gewichteten Graphen (V, E, c_n) definiere auf Funktionen $f, g : V \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{E}_n(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{\{u, v\} \in E} c_n(\{u, v\}) (f(u) - f(v)) \overline{(g(u) - g(v))}.$$

Auf dem endlichen Approximanten gilt (nach Fixierung des Nullmodus durch Grounding/Jitter) formal

$$\mathcal{E}_n(f, g) = \langle f, L_n g \rangle_{\ell^2(V)}.$$

Cut-off selbst als Coarse-Graining. Unter dem ontischen Postulat $L_{\max} = \infty$ ist die Wahl eines endlichen Darstellungslevels $L_{\max}$ bereits ein Coarse-Graining: Die nicht dargestellten Freiheitsgrade (tiefe Level $> L_{\max}$ bzw. Komplement außerhalb eines gewählten Patches) werden als Umwelt verstanden und sind in Randantworten (DtN/Kron) bzw. in Randkanälen Φ_B implizit ausgespart. Alle in dieser Spezifikation auftretenden Operatoren auf V sind daher als deterministische Trunk-Approximationen der entsprechenden ontischen Objekte zu lesen (Grenzübergang $L_{\max} \uparrow \infty$).

Energie-Hilbertraum (optional; mathematische Kontrolle). Die Energie-Norm ist $\|f\|_{\mathcal{E}_n}^2 := \mathcal{E}_n(f, f)$ auf Quotienten $f \sim f + \text{const.}$ Die Vervollständigung liefert einen Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_n}$ (Energieraum).

Arbeitsraum (Ein-Teilchen-Sektor) für Laplacian/DtN. Fixiere $d_p \in \mathbb{N}$ (Default: $d_p = 1$) und setze

$$\mathcal{H}_V := \ell^2(V) \quad (\text{kanonische ONB } \{|x\rangle : x \in V\}), \quad \mathcal{H} := \mathcal{H}_V \otimes \mathbb{C}^{d_p}.$$

Alle Laplacians/DtN-Operatoren wirken kanonisch als $(L_n \otimes I_{d_p})$ bzw. auf den jeweiligen Rand-Unterräumen.

Intrinsischer Split: Rand(e) = System, innere Freiheitsgrade = Umwelt (bis zum Cut-off). Für jedes (nichtleere) Randsubset $B \subseteq V$ setzen wir

$$\mathcal{H}_B := \ell^2(B) \otimes \mathbb{C}^{d_p}, \quad \mathcal{H}_{\bar{B}} := \ell^2(V \setminus B) \otimes \mathbb{C}^{d_p}, \quad \mathcal{H} \cong \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_{\bar{B}}.$$

Wir schreiben insbesondere $\mathcal{H}_{B_w} := \mathcal{H}_B$ für $B = B_w$ und $\mathcal{H}_{B_0}$ für $B = B_0$. Semantisch: B trägt die *System*-Freiheitsgrade, $V \setminus B$ die *intrinsische Umwelt* (alles, was im endlichen Approximanten vorhanden ist, bis zur Cut-off-Grenze).

Zell-Split (lokale Umwelt von innen heraus). Für jede Zelle w mit $V_w = B_w \sqcup I_w$ interpretieren wir B_w als System und I_w als lokale, intrinsische Umwelt. Global vs. lokal bedeutet dann: Ausspuren von I_w (lokal) versus Ausspuren von $V \setminus B_w$ (global).

2.5 prä-OQS-Channel auf den Rand (CPTP, intrinsischer System/Umwelt-Split)

System/Umwelt als $B \sqcup (V \setminus B)$ im Cut-off-Approximanten. Für eine feste Randmenge $B \subseteq V$ (z. B. $B = B_0$ oder $B = B_w$) verwenden wir den in der Hilbertraum-Subsection definierten Split

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_{\bar{B}}, \quad \mathcal{H}_B := \ell^2(B) \otimes \mathbb{C}^{d_p}, \quad \mathcal{H}_{\bar{B}} := \ell^2(V \setminus B) \otimes \mathbb{C}^{d_p}.$$

Semantik (intrinsisch): $\mathcal{H}_B$ trägt die *System*-Freiheitsgrade (Rand/Ränder), $\mathcal{H}_{\bar{B}}$ die *Umwelt*-Freiheitsgrade, die im endlichen Approximanten bis zur Cut-off-Grenze tatsächlich vorhanden sind.

Kanonisches, deterministisches Coarse-Graining auf den Rand. Sei $\Pi_B : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(V)$ der orthogonale Vertex-Projektor, $(\Pi_B f)(x) = \mathbf{1}_{\{x \in B\}} f(x)$, und setze den zugehörigen Hilbertraum-Projektor

$$P_B := \Pi_B \otimes I_{d_p} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Fixiere eine Referenzdichtematrix σ_B auf $\mathcal{H}$ mit Träger in $\mathcal{H}_B$, d. h. $P_B \sigma_B P_B = \sigma_B$. Als kanonischen Default setzen wir

$$\sigma_B := \frac{1}{\text{Tr}(P_B)} P_B = \frac{1}{|B| d_p} P_B.$$

Definiere den CPTP-Kanal

$$\Phi_B(\rho) := P_B \rho P_B + \text{Tr}((I - P_B)\rho) \sigma_B.$$

Dieser Kanal implementiert ein *deterministisches* Projektions-/Ersetzungs-Coarse-Graining in der Direktzerlegung $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_{\bar{B}}$; er entspricht nicht einer ontischen Tensorfaktorisierung, sondern einer wohldefinierten CPTP-Abbildung auf Systemzustände (Träger in $\mathcal{H}_B$).

Einbettung (Injection) von Randzuständen in die globale Algebra. Wir identifizieren Zustände ρ_B auf $\mathcal{H}_B$ kanonisch mit Zuständen auf $\mathcal{H}$ durch die Einbettung

$$\iota_B(\rho_B) := \rho_B, \quad \text{verstanden als Operator auf } \mathcal{H} \text{ mit } P_B \iota_B(\rho_B) P_B = \iota_B(\rho_B).$$

Damit ist $\Phi_B \circ \iota_B = \text{id}$ auf Randzuständen.

Zell-Split (lokale Umwelt von innen heraus). Für eine Zelle w mit $V_w = B_w \sqcup I_w$ betrachten wir zusätzlich den lokalen Hilbertraum

$$\mathcal{H}_{V_w} := \ell^2(V_w) \otimes \mathbb{C}^{d_p} \cong \mathcal{H}_{B_w} \oplus \mathcal{H}_{I_w},$$

und definieren das lokale Coarse-Graining auf B_w analog als CPTP-Kanal $\Phi_{B_w}^{(w)}$ auf $\mathcal{H}_{V_w}$ (mit Default $\sigma_{B_w} = P_{B_w} / \text{Tr}(P_{B_w})$). Dies formalisiert den gewünschten intrinsischen Split: *lokale Umwelt* = I_w (von innen heraus), *System* = B_w .

2.6 Vollständiger OQS-Zeitschritt (intrinsisch) + optionale Zustandsdiagnostik

Grundsatz (OQS-first, ohne exogene Freiheitsgrade). Für Driver-B wird *kein* Zustand ρ benötigt: die Rückkopplung basiert ausschließlich auf kanalbasierten CPTP-Kanälen $\Phi_{n,w}^{\text{glob}}$ und $\Phi_{n,w}^{\text{loc}}$, die deterministisch aus globalen bzw. lokalen DtN-Matrizen über eine kanonische GKSL-Konstruktion[8, 9] abgeleitet werden (siehe Subsection “Einziges Mismatch-Funktional”). Die nachfolgende Zustandsentwicklung ist daher *optional* und dient ausschließlich der Simulation/Diagnostik.

Globale intrinsische Dynamik auf $\mathcal{H} = \ell^2(V) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$. Fixiere für jeden Zeitschritt n einen CPTP-Kanal $\mathcal{T}_n : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Diese globale Dynamik ist in dieser Definition *nur* ein optionales Diagnose-/Simulationsinstrument (z. B. für Randzustandsläufe) und *kein* Bestandteil der normativen Driver-B-Rückkopplung.

Als prä-geometrische Minimalwahl definieren wir eine *intrinsische Probe-Dynamik*, deren Generator kanonisch aus der Dirichlet-Form hervorgeht. Sei A_n der zu $\mathcal{E}_n$ gehörige selbstadjungierte, positiv semidefinite Operator auf $\mathcal{H}_V$ (im endlichen Trunk: $A_n = L_n$ als gewichtete Laplacian aus c_n)[15, 4]. Fixiere einen dimensionslosen Skalenfaktor $\kappa_n > 0$ (Default in Pfeiler A: $\kappa_n := 1$) und setze

$$H_n := \kappa_n (A_n \otimes I_{d_p}), \quad U_n := \exp(-i \Delta t H_n), \quad \mathcal{T}_n(\rho) := U_n \rho U_n^\dagger.$$

Diese globale Dynamik ist in dieser Definition *nur* ein optionales Diagnose-/Simulationsinstrument (z. B. für Randzustandsläufe) und *kein* Bestandteil der normativen Driver-B-Rückkopplung.

Rand-lokale Probe (optional; kompatibel mit DtN/Kron). Alternativ kann die Probedynamik direkt auf dem beobachtbaren Rand formuliert werden, indem als Generator der DtN-Operator verwendet wird:

$$H_{n,B_0} := \kappa_n^{(\Lambda)} (\Lambda_n \otimes I_{d_p}), \quad U_{n,B_0} := \exp(-i \Delta t H_{n,B_0}), \quad \mathcal{T}_{n,B_0}(\rho) := U_{n,B_0} \rho U_{n,B_0}^\dagger,$$

mit einem (prä-geometrischen) Skalenfaktor $\kappa_n^{(\Lambda)} > 0$ (Default: $\kappa_n^{(\Lambda)} := 1$). Dies liefert eine *rein randgetragene* unitäre Probe, ohne Aussagen über nicht beobachtete innere Freiheitsgrade zu implizieren.

Prä-geometrischer Status (keine Energie-/Zeit-Behauptung). Die Notation „ H_n “ ist hier *formal* (selbstadjungierter Generator) und fixiert keine physikalische Energie. Ebenso ist $\Delta t := 1$ eine reine Einheiten-/Gauge-Fixierung; eine physikalische Zeitskala darf erst nach einem Emergenzpfad (Coarse-Graining/Level-Grenzwert, Stabilität von Spektral invarianten, anschließende Kalibrierung) zugeordnet werden. Insbesondere müssen alle aus der Probe-Dynamik abgeleiteten Observablen *robust* gegenüber Numerik-Policies (Regularisierung, Präzision) sein, bevor eine physikalische Interpretation vorgenommen wird.

Alternative (optional): intrinsischer GKSL auf $\mathcal{H}$. Falls eine explizit dissipative globale Dynamik gewünscht ist, kann man kanonisch eine GKSL-Form aus den Leitwerten ableiten (Quantum-Stochastic-Walk): für jede orientierte Kante $x \rightarrow y$ mit $\{x, y\} \in E$ setze

$$J_{x \rightarrow y}^{(n)} := \sqrt{c_n(\{x, y\})} (|x\rangle\langle y| \otimes I_{d_p}),$$

und definiere

$$\mathcal{L}_n(\rho) := \sum_{x \neq y: \{x, y\} \in E} \left(J_{x \rightarrow y}^{(n)} \rho (J_{x \rightarrow y}^{(n)})^\dagger - \frac{1}{2} \{ (J_{x \rightarrow y}^{(n)})^\dagger J_{x \rightarrow y}^{(n)}, \rho \} \right), \quad \mathcal{T}_n := \exp(\Delta t \mathcal{L}_n).$$

Diese Alternative bleibt vollständig graph-intrinsisch; sie ist jedoch *nicht* Bestandteil der kanonischen Driver-B-Definition.

Randzustands-Update als intrinsisches Ausspuren der Umwelt. Für eine Randmenge B (insb. $B = B_0$) definieren wir den Randkanal

$$\Psi_{n,B} := \Phi_B \circ \mathcal{T}_n \circ \iota_B,$$

der CPTP auf $\mathcal{D}(\mathcal{H}_B)$ ist. Als kanonischen Default für einen reinen Randzustandslauf setzen wir

$$\rho_0^{(B)} := \sigma_B, \quad \rho_{n+1}^{(B)} := \Psi_{n,B}(\rho_n^{(B)}).$$

Für Zellen w kann analog auf $\mathcal{H}_{V_w}$ mit $\Phi_{B_w}^{(w)}$ gearbeitet werden, wobei die lokale Umwelt I_w intrinsisch “von innen heraus” ausgespurt wird.

2.7 Globales DtN/Kron auf B_0 und Randenergie-Summe (kein Freeze)

Globales DtN/Kron auf B_0 (deterministisch regularisiert).

Ontisch vs. Trunk (Cut-off) im DtN. Der ontische DtN-Operator ist Λ_{n,B_0} des unendlichen Graphen (vgl. Ontik-Subsection). Der in endlicher Rechnung verfügbare Wert bei Darstellungslevel $L_{\max}$ ist die deterministische Trunk-Approximation $\Lambda_{n,B_0}^{(L_{\max})}$. In diesem Dokument schreiben wir der Kürze halber $\Lambda_n := \Lambda_{n,B_0}^{(L_{\max})}$; der ontische Operator ist als Grenzwert $\Lambda_{n,B_0} = \lim_{L \rightarrow \infty} \Lambda_{n,B_0}^{(L)}$ definiert, sofern der Grenzwert existiert.

Dies ist die (regularisierte) Kron-Reduktion bzw. der Dirichlet-to-Neumann-Operator des gewichteten Graphen.[16, 17, 5, 4]

Schreibe $V = B_0 \sqcup I$ mit $I := V \setminus B_0$ und blockzerlege (in der Patch-1-Subset-Ordnung)

$$L_n = \begin{pmatrix} (L_n)_{BB} & (L_n)_{BI} \\ (L_n)_{IB} & (L_n)_{II} \end{pmatrix}.$$

Falls $I = \emptyset$, setze $\Lambda_n := (L_n)_{BB}$. Falls $I \neq \emptyset$, definieren wir deterministisch

$$(L_n)_{II,\text{reg}} := \text{Reg}_{\text{SPD}}((L_n)_{II}).$$

und setzen

$$X_{I \leftarrow B}^{\text{glob}} := \text{solve}((L_n)_{II,\text{reg}}, (L_n)_{IB}), \quad \Lambda_n := (L_n)_{BB} - (L_n)_{BI} X_{I \leftarrow B}^{\text{glob}}.$$

(Kron-Reduktion als Schur-Komplement; deterministische Regularisierung zur Implementierbarkeit.)

Randtests und Randenergie. Es wird *kein* ausgezeichneter Eckindex (kein Anker) verwendet. Stattdessen werden Randtests symmetrisch über *ungeordnete Paare* der Ecklabels definiert. Sei $q := |S_\bullet| = |B_0|$ und sei $(b_0, \dots, b_{q-1})$ die Patch-1-Randordnung.

Für jedes Paar $0 \leq i < j \leq q-1$ definiere $y^{(ij)} \in \mathbb{R}^{|B_0|}$ durch

$$y^{(ij)}(b_i) = 1, \quad y^{(ij)}(b_j) = -1, \quad y^{(ij)}(b_k) = 0 \quad (k \neq i, j).$$

Definiere die zugehörige Paar-Randenergie

$$\mathcal{E}_{B_0,n}^{(ij)} := \frac{1}{2} (y^{(ij)})^\top \Lambda_n y^{(ij)}, \quad (0 \leq i < j \leq q-1),$$

sowie die *Knotenenergien* auf B_0 als

$$\mathcal{E}_{B_0,n}(b_i) := \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \mathcal{E}_{B_0,n}^{(\min\{i,j\}, \max\{i,j\})}.$$

Die *erhaltene* Randenergie-Summe (Constraint via λ_n) ist

$$\mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}} := \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{E}_{B_0,n}(b_i) = \sum_{0 \leq i < j \leq q-1} \mathcal{E}_{B_0,n}^{(ij)}.$$

[6, 16, 17]

Rand-inzidente Kantenmenge (kein Freeze). Definiere

$$E_\partial := \{\{u, v\} \in E : u \in B_0 \text{ oder } v \in B_0\}.$$

Alle Kanten (auch E_∂) werden durch Driver-B mitgetrieben; zusätzlich wird per λ_n die Randenergie-Summe erhalten.

Kein Randenergie-Constraint für Subsysteme. Für lokale Subsysteme/Zellen w mit lokalem Rand B_w wird in Pfeiler A *keine* Erhaltung einer lokalen Randenergie-Summe gefordert. Die Randenergie-Summe auf B_0 ist ein globales Ziel-Constraint zur kanonischen Fixierung des Driver-B-Schrittes und dient nicht als zusätzliche Physikannahme für die Individuation eines Subsystems (vgl. Abschnitt 1: Spezialfall $B = B_0$ vs. Allgemeinfall $B = B_w$).

2.8 Skalierbarkeit, Sparse-Formate und Komplexität (Engineering-Hinweise; nicht-normativ)

Diese Spezifikation ist als *kanonische Referenz* (Pfeiler A) formuliert und priorisiert Determinismus/Totalität über maximale Skalierbarkeit. Für größere $L_{\max}$ sind dennoch folgende Engineering-Fakten relevant:

Größenordnung. Für SG wächst $|V_L|$ asymptotisch wie $\Theta(3^L)$, für ST wie $\Theta(4^L)$ (Approximanten auf Level L). Die Anzahl der Kanten wächst proportional.

Laplacian-Bau. Der Aufbau von L_n aus Leitwerten ist $O(|E_L|)$ und sollte in einem *sparsity-erhaltenden* Format erfolgen (z. B. CSR für Matrix-Vektor, CSC für Faktorisierungen; normativ bleibt die Ordnungswahl lexikographisch).

DtN/Kron. Die numerischen Kosten werden durch die Solve-Schritte auf Blöcken $(L_n)_{\bar{B}\bar{B}}$ dominiert. Bei direkter (dichter) Faktorisierung wären dies $O(|\bar{B}|^3)$; in der Praxis ist $(L_n)_{\bar{B}\bar{B}}$ dünn-besetzt, so dass sparse-direct Verfahren wesentlich günstiger sein können, *aber* die Eliminationsordnung muss deterministisch fixiert sein, um D0/D1 reproduzierbar zu bleiben.

Explorationsmodus (nicht kanonisch). Iterative Krylov-Verfahren, Preconditioning, Block-Elimination und Parallel-Cholesky können die Skalierung dramatisch verbessern, sind jedoch typischerweise nicht bit-stabil. Sie sind daher in Pfeiler A nur als *Explorationsmodus* zulässig: Ergebnisse dürfen dann *nur* unter D1 (toleranz-invariant) verglichen werden, und das Sensitivitätsprotokoll (Def. 2.6) ist verpflichtend.

Report-Pflichten. Jeder Run muss *zusätzlich* Laufzeit-, Speicher- und Sparsity-Metriken loggen:

$$|V|, |E|, \text{nnz}(L_n), \text{nnz}(\Lambda_{n,B}), t_{\text{build}}, t_{\text{solve}}, \text{mem}_{\max}.$$

Damit wird Skalierbarkeit als Engineering-Aspekt transparent, ohne die physikalische Semantik zu verändern.

3 Widerstandsmetrik (kanonisch: effektiver Widerstand aus der Dirichlet-Form)

Motivation (nicht-normativ): Pseudoinverse-Formel

Hinweis. Die folgende Pseudoinverse-Formel dient ausschließlich der konzeptuellen Einordnung. Sie ist *nicht* Bestandteil der normativen Definition und darf in Implementationen/Tests nicht verwendet werden.

Für verbundene Graphen kann der *effektive Widerstand* formal geschrieben werden als

$$R_n(u, v) := (e_u - e_v)^\top L_n^\dagger (e_u - e_v), \quad d_n(u, v) := \sqrt{R_n(u, v)}.$$

[21, 6, 4, 1]

3.1 Normative Definition (implementierbar): Konnektivität + Grounding + Symmetrisierung + SPD-Regularisierung + Solve

(i) Basis- und Indexbindung. Für jeden Knoten $x \in V$ sei $\text{id}(x)$ die in Patch 1 festgelegte deterministische ID. Die Standardbasisvektoren $(e_x)_{x \in V}$ sind in der *Patch-1-Subset-Ordnung* von V zu interpretieren, d. h. e_x hat an der Komponente von x (in dieser Ordnung) den Wert 1 und sonst 0.

(ii) Positiv-Kanten und Konnektivitätsregel. Definiere den Positiv-Kanten-Teilgraphen

$$E_n^+ := \{(a, b) \in E : c_n(a, b) > 0\}.$$

Sei $CC_n(x)$ die Zusammenhangskomponente von x in (V, E_n^+) . Falls $u, v \in V$ nicht in derselben Komponente liegen, dann ist normativ

$$R_n(u, v) := +\infty, \quad d_n(u, v) := +\infty.$$

Diese Regel hat Vorrang vor jeder Regularisierung (kein “künstliches Verbinden” durch numerische Jitter-Terme).

(iii) Deterministisches Grounding. Wähle deterministisch den Ground-Knoten

$$g := \arg \min_{x \in V} \text{id}(x).$$

Sei $\pi_g : \mathbb{R}^{|V|} \rightarrow \mathbb{R}^{|V|-1}$ die Projektion, welche die g -Komponente entfernt. Sei $L_n^{(g)}$ die reduzierte Laplacian, die aus L_n durch Entfernen von Zeile/Spalte g entsteht (in Patch-1-Subset-Ordnung).

(iv) Symmetrisierung und SPD-Regularisierung. Setze

$$S_n^{(g)} := \frac{1}{2}(L_n^{(g)} + (L_n^{(g)})^\top), \quad \delta_R := \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, \|S_n^{(g)}\|_F\}.$$

Bemerkung. δ_R ist eine deterministische *Float64*-Stabilisierung, kein physikalischer Parameter (vgl. Remark 3.1).

(v) Solve-Definition. Für $u, v \in V$ mit $CC_n(u) = CC_n(v)$ definiere

$$b := \pi_g(e_u - e_v)$$

und löse deterministisch (Solver-Policy gemäß Abschnitt 2)

$$(S_n^{(g)} + \delta_R I)x = b.$$

Falls der Solve-Schritt fehlschlägt (NaN/Inf, Divergenz, Exception) oder wenn $b \notin \text{Range}(S_n^{(g)} + \delta_R I)$ numerisch detektiert wird, dann setze normativ wieder

$$R_n(u, v) := +\infty, \quad d_n(u, v) := +\infty.$$

Andernfalls definiere

$$R_n(u, v) := \max\{0, b^\top x\}, \quad d_n(u, v) := \sqrt{R_n(u, v)}.$$

Hinweis. Das $\max\{0, \cdot\}$ ist eine deterministische Rundungsfehler-Korrektur; negative Werte können nur durch numerische Artefakte entstehen.

Bemerkung 3.1 (Numerische Regularisierung und Emergenz-Robustheit). Die Größe δ_R ist eine deterministische *Float64*-Stabilisierung (Rundungsfehler-Sicherheitsmarge) und *kein* physikalischer Parameter. Sie gehört zur kanonischen *Implementationsdefinition* der Widerstandsmetrik, damit $R_n(u, v)$ über ein wohldefiniertes Solve-Problem berechenbar ist. Für spätere physikalische Interpretationen ist zusätzlich nachzuweisen (per Protokoll/Suite), dass die interessierenden Observablen im relevanten Skalenfenster robust gegenüber Präzisionswechseln und gegen die konkrete Regularisierungs-Policy sind (z. B. Vergleich float64 vs. higher precision bzw. Variation der Sicherheitsmarge innerhalb zulässiger Schranken).

3.2 Visualisierungs-Gauges (nicht-normativ): MDS und harmonische Einbettung

Prinzip. Einbettungen $X_n : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ dienen *ausschließlich* der Visualisierung. Sie sind *kein* Bestandteil der normativen Definitionen von Abschnitt 1–3 und dürfen keine Inferenz über “echte” Geometrie tragen. Alle numerischen Details sind als `viz_gauge`-Metadaten in Reports auszuweisen.

Gauge A (MDS: Torgerson–Gower/klassische Skalierung). Gegeben eine Distanzmatrix $D = (d_n(u, v))_{u, v \in V}$ (typisch auf die größte endliche Zusammenhangskomponente eingeschränkt), liefert die klassische MDS Koordinaten X_n über Double-Centering der quadrierten Distanzen und Eigenzerlegung (“principal coordinates”). [22, 23]

Gauge B (Stress-MDS nach Kruskal). Alternativ kann eine (nicht-metrische) Stress-Minimierung verwendet werden, um nicht-euklidische Distanzen d_n in niedrige Dimensionen abzubilden, wobei die Stress-Funktion normativ zu reporten ist (inkl. Initialisierung/Stopkriterium). [24]

Gauge C (harmonische Einbettung als Dirichlet-Randwertproblem). Fixiere Randkoordinaten $Y_B : B_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ (SG: äquilateral; ST: kanonische Tetraeder-Koordinaten in $d = 3$, anschließend ggf. Projektion für 2D-Plot). Für jede Koordinatenkomponente $j = 1, \dots, d$ löse die diskrete harmonische Fortsetzung

$$(L_n)_{II, \text{reg}} y_I^{(j)} = -(L_n)_{IB} y_B^{(j)},$$

wobei $B = B_0$, $I = V \setminus B$, und Reg_{SPD} (Abschnitt 2) für $(L_n)_{II, \text{reg}}$ zu verwenden ist. Setze $X_n(x) := y^{(\cdot)}(x)$ komponentenweise. [2, 1, 3]

Zeitreihen-Vergleich (rigide Ausrichtung). Für Vergleiche über n (oder IDEAL vs. REAL) kann ein rigider Procrustes-Abgleich (Translation/Rotation, optional Skalierung) zwischen X_n und einem Referenzlayout X_{ref} angewandt werden; dies ist rein visuell und als Metadatum zu reporten.

Optionale visuelle Verstärkung. Ein reiner Anzeige-Faktor $a_{\text{vis}} > 0$ darf auf die Koordinaten angewandt werden (z. B. auf Abweichungen relativ zu X_{ref}), muss aber explizit als *nicht-physikalisch* markiert werden.

3.3 Akzeptanzkriterien & Diagnostik zur Widerstandsmetrik (normativ: Report-Felder; Gates als Compliance-Checks)

Dieser Abschnitt führt *keine* zusätzliche Physik ein. Er fixiert lediglich *testbare* Konsistenz- und Robustheitskriterien, die eine deterministische Implementierung der Widerstandsmetrik *auditierbar* machen (vgl. Abschnitt 1: Gate/Report-Semantik). Die folgenden Checks sind *prä-geometrische Compliance-Checks* für die Definition der Größen $R_n(u, v)$ und $d_n(u, v) := \sqrt{R_n(u, v)}$.

Deterministische Stichprobenpolitik (Pairs/Triangles). Sei V_n die Patch-1-Vertexmenge mit deterministischer ID-Abbildung $\text{id} : V_n \rightarrow \{0, \dots, |V_n| - 1\}$. Definiere einen deterministischen Seed (wobei `graph_hash` der kanonische Hash des aktuellen Zustands (V_n, E_n^+, c_n) gemäß §3.3 ist)

$$s_R := \text{u32}(\text{SHA256}(\text{policy_hash} \parallel \text{graph_hash} \parallel \text{R_AUDIT})),$$

und ziehe daraus (ohne Zurücklegen) Stichprobenmengen

$$\mathcal{P}_R \subseteq \{(u, v) \in V_n^2 : \text{id}(u) < \text{id}(v)\}, \quad \mathcal{T}_R \subseteq V_n^3$$

mit den Defaultgrößen

$$|\mathcal{P}_R| := \min\{5000, \binom{|V_n|}{2}\}, \quad |\mathcal{T}_R| := \min\{10000, |V_n|^3\}.$$

Falls $|V_n| \leq 200$, darf $\mathcal{P}_R$ auch als *alle* Paare gewählt werden (deterministisch, lexikographisch). Alle Stichproben sind *reproduzierbar* und werden im Report über s_R , $|\mathcal{P}_R|$, $|\mathcal{T}_R|$ dokumentiert.

Kanonischer Graph-Hash (Audit-Reproduzierbarkeit). Für jeden Run ist `graph_hash` als

$$\text{graph_hash} := \text{SHA256}(\text{SER}_G)$$

zu berechnen und als Top-Level-Feld `graph_hash` im Report zu speichern. Dabei ist SER_G eine *kanonische* UTF-8-Serialisierung, die ausschließlich die für L_n relevante, prä-geometrische Graphstruktur kodiert:

- drei Header-Zeilen `n=n`, `L_max=L_max`, `nV=|V_n|` (jeweils gefolgt von `\n`);
- danach für jede Kante $(u, v) \in E_n^+ := \{(a, b) \in E_n : c_n(a, b) > 0\}$ genau eine Zeile

$$\text{e} = \text{id}(u) , \text{id}(v) , w \backslash \text{n},$$

wobei stets $\text{id}(u) < \text{id}(v)$ und die Zeilen lexikographisch nach $(\text{id}(u), \text{id}(v))$ sortiert werden;

- $w := \text{hex64}(c_n(u, v))$ ist die 16-stellige Hex-Kodierung der 8 IEEE754-binary64-Bytes im Little-Endian-Layout (die Leitwerte c_n sind gemäß Policy als float64 zu interpretieren).

Diese Definition ist rein deterministisch und führt *keine* neuen Modellparameter ein; sie dient ausschließlich der Auditierbarkeit der Stichprobenpolitik.

Skalenadaptierte Toleranzen. Sei

$$R_{\max} := \max\{R_n(u, v) : (u, v) \in \mathcal{P}_R, R_n(u, v) < \infty\}, \quad d_{\max} := \max\{d_n(u, v) : (u, v) \in \mathcal{P}_R, d_n(u, v) < \infty\},$$

mit der Konvention $R_{\max} = d_{\max} = 1$ falls keine endlichen Stichproben vorliegen. Setze

$$\tau_R := 10^{-8} \max\{1, R_{\max}\}, \quad \tau_d := 10^{-8} \max\{1, d_{\max}\}.$$

$$\tau_{\text{res}} := 10^{-10}.$$

Diese Toleranzen sind *numerische* Akzeptanzschwellen (Float64-Umfeld) und *keine* physikalischen Parameter.

Normative Report-Felder. Jeder Run, der Widerstände/Abstände ausgibt, **MUSS** mindestens folgende Report-Felder schreiben:

`graph_hash`, `res.nV`, `res.nCC`, `res.seed`, `res.nPairs`, `res.nTris`, `res.Rmax`, `res.dmax`,

sowie die diagnostischen Kennzahlen unten.

Hard-Compliance-Checks (PASS/FAIL, ohne neue Physik). Die folgenden Checks sind als *harte* Konsistenzanforderungen der Definition zu verstehen:

1. **Disconnected-Sentinel (T3.R1).** Für $(u, v) \in \mathcal{P}_R$ mit $CC_n(u) \neq CC_n(v)$ muss gelten:

$$R_n(u, v) = \infty, \quad d_n(u, v) = \infty.$$

Report: `res.disc_pairs`, `res.disc_inf_ok_frac`. FAIL falls `disc_inf_ok_frac` < 1.

2. **Nichtnegativität (T3.R2).** Für alle endlichen Stichprobenpaare muss gelten:

$$R_n(u, v) \geq -\tau_R.$$

Report: `res.Rmin`. FAIL falls `Rmin` < $-\tau_R$.

3. **Diagonal (T3.R3).** Für alle Stichprobenknoten u muss gelten:

$$R_n(u, u) = 0.$$

Operational: prüfe $|R_n(u, u)| \leq \tau_R$. Report: `res.diag_abs_max`. FAIL falls `diag_abs_max` > τ_R .

4. **Symmetrie (T3.R4).** Für endliche Stichprobenpaare muss gelten:

$$|R_n(u, v) - R_n(v, u)| \leq \tau_R.$$

Report: `res.sym_abs_max`. FAIL falls `sym_abs_max` > τ_R .

5. **Solve-Integrität (T3.R5).** Wenn (u, v) in derselben Zusammenhangskomponente liegt und die Implementierung $R_n(u, v)$ als endlich ausgibt, *MUSS* der zugehörige lineare Solve erfolgreich gewesen sein (keine NaNs/Infs in x) und die Residualnorm

$$r := \frac{\|(S_n^{(g)} + \delta_R I)x - b\|_2}{\max\{1, \|b\|_2\}}$$

MUSS im Report dokumentiert werden. Report: `res.resid_rel_max`. FAIL falls `resid_rel_max` > τ_{res} .

Soft-Diagnostik (nicht blockierend, aber zwingend zu reporten). Diese Checks sind *diagnostisch* und dienen der Stabilitäts- und Emergenzpfad-Qualitätssicherung:

1. **Dreiecksungleichung-Audit (T3.D1).** Für $(u, v, w) \in \mathcal{T}_R$ innerhalb derselben Zusammenhangskomponente definiere die Verletzung

$$\Delta_{uvw} := \max\{0, d_n(u, w) - d_n(u, v) - d_n(v, w)\}.$$

Report: `res.tri_viol_max` := $\max \Delta_{uvw}$, `res.tri_viol_frac` := Anteil mit $\Delta_{uvw} > \tau_d$. Hinweis: In exakter Arithmetik ist $\sqrt{R}$ auf zusammenhängenden Graphen eine Metrik; in Float64 sind kleine Verletzungen möglich.

2. **Policy-Robustheit (T3.D2, optional).** Optional kann (profilgesteuert) ein zweiter deterministischer Ground-Knoten g' gewählt werden (z.B. zweitkleinste ID) und die relative Abweichung

$$\Delta_R^{\text{ground}} := \max_{(u,v) \in \mathcal{P}_R, R < \infty} \frac{|R_n^{(g)}(u, v) - R_n^{(g')}(u, v)|}{\max\{1, R_n^{(g)}(u, v)\}}$$

gerappt werden. Report: `res.ground_delta_rel_max`. Default: SKIP, falls Profil deaktiviert.

Gate/Report-Semantik. Alle Checks liefern Gate-States in $\{\text{PASS}, \text{FAIL}, \text{SKIP}\}$. Ein FAIL in **T3.R1–T3.R5** ist als *Definition-Compliance-Fail* zu behandeln. Soft-Diagnostik (T3.D1–T3.D2) ist nicht blockierend, wird aber *immer* berichtet (oder als SKIP ausgewiesen).

4 Driver-B (prä-geometrischer Feedback-Treiber; rand-inzident inklusive)

4.1 Adressmengen und äquivalente LCP-Maß-Zuordnung von Kanten

Für $x \in V$ definiere aus Patch 1:

$$A_x := \{w \in S_{\bullet}^{L_{\max}} : \exists i \in S_{\bullet} \text{ mit } (w, i) \in \text{Rep}(x)\}.$$

Für Wörter $u, v \in S_{\bullet}^{L_{\max}}$ bezeichne $\text{lcp}(u, v) \in S_{\bullet}^{\leq L_{\max}}$ den längsten gemeinsamen Präfix. Für eine Kante $e = \{x, y\} \in E$ definiere die Kandidatenmenge der Präfixe

$$P(e) := \{\text{lcp}(u, v) : u \in A_x, v \in A_y\} \subseteq S_{\bullet}^{\leq L_{\max}}.$$

Maximale Präfix-Ties (set-valued). Falls $P(e) = \emptyset$ (dies sollte für E gemäß der Kantenkonstruktion nicht auftreten), setze deterministisch

$$\ell_{\max}(e) := 0, \quad P^*(e) := \{\emptyset\}.$$

Andernfalls setze

$$\ell_{\max}(e) := \max_{q \in P(e)} |q|, \quad P^*(e) := \{p \in P(e) : |p| = \ell_{\max}(e)\}.$$

Äquivalente Zellzuordnung als Maß (kein lexikographischer Symmetriebruch). Für $k \in \{1, \dots, K_{\max}\}$ und $w \in S_{\bullet}^k$ definieren wir die (deterministische) Zuordnungsgewichte

$$\mu_{k,w}(e) := \begin{cases} \frac{|\{p \in P^*(e) : \text{pref}_k(p) = w\}|}{|P^*(e)|}, & \ell_{\max}(e) \geq k, \\ 0, & \ell_{\max}(e) < k, \end{cases}$$

wobei $\text{pref}_k(p) \in S_{\bullet}^k$ den Präfix der Länge k bezeichnet (nur definiert für $|p| \geq k$). Definiere außerdem die endliche Supportmenge

$$W_k(e) := \{w \in S_{\bullet}^k : \mu_{k,w}(e) > 0\}.$$

Als *reinen Report-/Visualisierungsrepräsentanten* (nicht normativ für die Dynamik) setzen wir

$$w_k^{\text{rep}}(e) := \begin{cases} \min_{<_{\text{lex}}} W_k(e), & W_k(e) \neq \emptyset, \\ \perp, & W_k(e) = \emptyset. \end{cases}$$

Für $k \geq 1$ definieren wir die adressierten Zellkantenmengen (abhängig von k)

$$E_w^{(k)} := \{e \in E : \mu_{k,w}(e) > 0\} \quad (w \in S_{\bullet}^k).$$

a. Konvention für $k = 0$. Wir identifizieren $S_\bullet^0 = \{\emptyset\}$. Für $w = \emptyset$ setzen wir

$$B_\emptyset = B_0, \quad V_\emptyset := B_0, \quad I_\emptyset = \emptyset, \quad Q_{n,\emptyset} := (L_n)_{B_0, B_0}, \quad \Lambda_{n,\emptyset} := (L_n)_{B_0, B_0}.$$

Ferner setzen wir deterministisch

$$\text{valid}(n, \emptyset) := 1.$$

Ferner definieren wir die Corner–Corner-Kantenmenge als genau jene Kanten, deren maximale LCP-Tie-Tiefe null ist:

$$E_\emptyset := \{e \in E : \ell_{\max}(e) = 0\}.$$

Für die spätere einheitliche Schreibweise setzen wir außerdem

$$\mu_{0,\emptyset}(e) := \mathbf{1}_{\{e \in E_\emptyset\}}.$$

Äquivarianz-Hinweis (Spezialfall $B = B_0$). Die Abbildung $e \mapsto (\mu_{k,w}(e))_{k,w}$ ist *set-/maßwertig* und damit invariant unter der natürlichen Wirkung von Alphabet- und Patch-1-Permutationen (insbesondere im Spezialfall $B = B_0$ wird kein zusätzlicher Symmetriebruch durch Tie-Breaking eingeführt). Lexikographische Ordnung tritt ausschließlich in w_k^{rep} als Report-Detail auf und ist dynamisch irrelevant.

4.2 Zellränder B_w , Zell-Vertexmengen V_w

Erinnerung: Die Zellrandknoten $b_{w,i}$ und Zellränder B_w sind bereits in § 1.12 definiert.

Für $k \geq 1$ und $w \in S_\bullet^k$ verwenden wir die in der vorigen Subsection definierte adressierte Zellkantenmenge

$$E_w^{(k)} = \{e \in E : \mu_{k,w}(e) > 0\}.$$

Definiere

$$V_w := \left(\bigcup_{e=\{u,v\} \in E_w^{(k)}} \{u,v\} \right) \cup B_w, \quad I_w := V_w \setminus B_w.$$

4.3 Äquivarianz- und Tie-Diagnostik (Compliance-Checks)

Dieser Abschnitt fixiert *maschinenprüfbare* Kriterien, die sicherstellen, dass die in der vorigen Subsection eingeführte äquivalente Tie-Behandlung tatsächlich *keinen* versteckten Label-/Lexikographie-Symmetriebruch in die Dynamik einschleust. Alle Checks liefern Gate-States in $\{\text{PASS}, \text{FAIL}, \text{SKIP}\}$. Ein FAIL in **T4.EQ1–T4.EQ4** ist als *Definition-Compliance-Fail* zu behandeln. Die Checks **T4.DQ1–T4.DQ2** sind Soft-Diagnostik (nicht blockierend), werden aber immer berichtet (oder explizit als SKIP ausgewiesen).

T4.EQ1 (Maß-Normierung). Für jede Kante $e \in E$, jedes $k \in \{1, \dots, K_{\max}\}$ gilt:

$$\sum_{w \in S_\bullet^k} \mu_{k,w}(e) = \mathbf{1}_{\{\ell_{\max}(e) \geq k\}}, \quad \mu_{k,w}(e) \geq 0.$$

Zusätzlich muss für $\ell_{\max}(e) \geq k$ gelten, dass $W_k(e) = \{w : \mu_{k,w}(e) > 0\}$ nichtleer ist.

T4.EQ2 (Tie-Reduktion). Falls $|P^*(e)| = 1$ (kein Tie), so ist für jedes $k \leq \ell_{\max}(e)$ die Zuordnung deterministisch: es existiert genau ein $w \in S_\bullet^k$ mit $\mu_{k,w}(e) = 1$, und für alle anderen w' ist $\mu_{k,w'}(e) = 0$. Damit reduziert sich die Maß-Zuordnung auf den früheren “single-cell”-Fall.

T4.EQ3 (Repräsentanten-Unabhängigkeit des Updates). Die in der Dynamik verwendeten Größen dürfen *nicht* von einer beliebigen Wahl $w_k^{\text{rep}}(e) \in W_k(e)$ abhängen. Dazu ist in jedem Run ein Konsistenz-Check zu berichten:

$$\Delta_n^{\text{check}}(e) := - \sum_{k=1}^{K_{\max}} \alpha_k \sum_{w \in W_k(e)} \mu_{k,w}(e) \kappa_n(w) \tilde{p}_{n,w}(e) - \mu_{0,\emptyset}(e) \kappa_n(\emptyset) \tilde{p}_{n,\emptyset}(e),$$

und es muss gelten

$$\max_{e \in E} |\Delta_n(e) - \Delta_n^{\text{check}}(e)| \leq 10^{-10}.$$

T4.EQ4 (Konjugations-Äquivarianz als Koordinaten-Invarianz). Für $\sigma \in S_q$ induziert π_σ eine Umbenennung der Corner-Symbole (SG: $q = 3$, ST: $q = 4$). Im Sinne der in Abschnitt 1 festgelegten Konjugations-Gates ist zu prüfen, dass die Tie-Zuordnung und die daraus abgeleitete Zelladressierung koordinaten-invariant ist, d. h.: Wende σ auf *alle* Wort-/Corner-Labels an (Adressmengen A_x , Zellwörter w , Randindizes $i \in S_\bullet$) und rekonstruiere die entsprechenden Größen; dann müssen die resultierenden Maße $\mu_{k,w}$ und Update-Exponenten $\Delta_n(e)$ nach Zurückumbenennung übereinstimmen. Dieser Check ist im **Referenzmodus** *pflichtig* (sonst FAIL); im Allgemeinmodus darf er als SKIP ausgewiesen werden, falls die Implementierung keine “relabel-run”-Rekonstruktion anbietet.

T4.DQ1 (Tie-Häufigkeit). Berichte pro k :

$$\text{tie_rate}_k := \frac{|\{e \in E : |P^*(e)| > 1, \ell_{\max}(e) \geq k\}|}{|\{e \in E : \ell_{\max}(e) \geq k\}|}, \quad m_k := \max_{e: \ell_{\max}(e) \geq k} |P^*(e)|.$$

Diese Felder sind diagnostisch und dürfen in Grenzfällen (z. B. leere Nenner) als SKIP ausgewiesen werden.

T4.DQ2 (Massen-Verteilung pro Zelle). Berichte pro k die Verteilung der Zellmassen $Z_w^{(k)} = \sum_{e \in E} \mu_{k,w}(e)$ (Mittel, Min/Max, Quantile), um unerwartete Degeneranzen der Zelladressierung sichtbar zu machen.

4.4 Lokaler loopy-Laplacian (physikalisch bevorzugt: principal submatrix + Shunts)

Für $w \in S_\bullet^k$ definiere den lokalen loopy-Laplacian als Hauptuntermatrix

$$Q_{n,w} := (L_n)_{V_w, V_w}.$$

Dies entspricht: Off-Diagonalen nur für interne Kanten in E mit beiden Endpunkten in V_w , während die Diagonale alle inzidenten Leitwerte (inkl. Kopplungen nach außen) als Shunts enthält.

4.5 Lokales DtN/Kron auf B_w (deterministisch; total definiert)

Ontisch vs. Trunk (Cut-off) im lokalen DtN. Der ontische lokale DtN-Operator $\Lambda_{n,w}$ ist als Randantwort auf B_w im unendlichen Graphen zu verstehen: er integriert (a) die inneren Freiheitsgrade I_w und (b) die tieferen Level innerhalb der Zelle w als Umwelt aus. Bei endlichem Darstellungslevel $L_{\max}$ wird $\Lambda_{n,w}$ durch die deterministische Trunk-Approximation $\Lambda_{n,w}^{(L_{\max})}$ ersetzt (Grounding + SPD-Regularisierung + Solve); eine systematische Verbesserung erfolgt durch $L_{\max} \uparrow \infty$.

Blockzerlege $Q_{n,w}$ nach $V_w = B_w \sqcup I_w$:

$$Q_{n,w} = \begin{pmatrix} (Q_{n,w})_{BB} & (Q_{n,w})_{BI} \\ (Q_{n,w})_{IB} & (Q_{n,w})_{II} \end{pmatrix}.$$

Falls $I_w = \emptyset$, setze $\Lambda_{n,w} := (Q_{n,w})_{BB}$ und $\text{valid}(n, w) := 1$. Falls $I_w \neq \emptyset$, definiere den deterministisch regularisierten Innenblock

$$(Q_{n,w})_{II,\text{reg}} := \text{Reg}_{\text{SPD}}((Q_{n,w})_{II}).$$

Setze $\text{valid}(n, w) := \text{cholOK}((Q_{n,w})_{II,\text{reg}})$.

Falls $\text{valid}(n, w) = 1$, setze

$$X_{I \leftarrow B}^{\text{loc}}(n, w) := \text{solve}((Q_{n,w})_{II,\text{reg}}, (Q_{n,w})_{IB}), \quad \Lambda_{n,w} := (Q_{n,w})_{BB} - (Q_{n,w})_{BI} X_{I \leftarrow B}^{\text{loc}}(n, w).$$

Falls $\text{valid}(n, w) = 0$, setzen wir deterministisch

$$\Lambda_{n,w} := (Q_{n,w})_{BB} + \delta_0((Q_{n,w})_{BB})I.$$

(Interpretation: Keine Inversion; nur die loopy-Randkopplung bleibt. Da $\kappa_n(w)$ ohnehin durch valid auf 0 gesetzt wird, dient dies ausschließlich der Totalität der Definition.)

4.6 IDEAL als Normierungsreferenz (diagnostisch; nicht im Feedback)

Der ontische IDEAL-Graph trägt kanonisch konstante Leitwerte $c^{\text{IDEAL}}(e) \equiv 1$. Ein endlicher Approximant (mit festem $L_{\max}$) ist stets als Subsystem/Approximation des unendlichen IDEAL-Graphen zu verstehen. Im Limes $L_{\max} \rightarrow \infty$ fallen (IDEAL, REAL) als *Graphträger* zusammen; nichttrivial ist ausschließlich die abgeleitete Leitwertdynamik auf endlichen Subsystemen.

Für Driver-B wird *keine* “IDEAL-Referenz gegen $n = 0$ ” verwendet. IDEAL-Größen dürfen ausschließlich zu *Normierung/Reporting* herangezogen werden, z. B.:

$$L^{\text{IDEAL}} := L(c^{\text{IDEAL}}), \quad d^{\text{IDEAL}} := d(c^{\text{IDEAL}}), \quad (\hat{\Lambda}_w^{\text{IDEAL}} \text{ optional nur diagnostisch}).$$

Die Rückkopplung basiert ausschließlich auf der kanalbasierten Einbettungsdivergenz $\Phi_{n,w}^{\text{glob}}$ vs. $\Phi_{n,w}^{\text{loc}}$ (Subsystem-Effekt).

4.7 Bidirektionale Backreaction als Coarse-Graining und Pullback (Terminologie, normativ)

Coarse-Graining ($\mathcal{C}$). Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}$ die *deterministische* Abbildung, die aus den mikroskopischen Leitwerten $c_n : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ die makroskopische Randantwort in Form der für Driver-B benötigten Kanalpaare erzeugt:

$$c_n \xrightarrow{\mathcal{C}} \{(\Phi_{n,w}^{\text{glob}}, \Phi_{n,w}^{\text{loc}})\}_{w \in V_{L_{\max}}}.$$

Konkret besteht $\mathcal{C}$ aus der Kette

$$c_n \mapsto L_n \mapsto (\text{globale/lokale DtN bzw. Kron-Objekte}) \mapsto (\Phi_{n,w}^{\text{glob}}, \Phi_{n,w}^{\text{loc}}),$$

wobei die Eliminierung innerer Freiheitsgrade ausschließlich über die in dieser Spezifikation fixierten DtN/Kron-Schritte (Schur-Komplement in *Solve*-Semantik, inklusive deterministischer Stabilisierung) erfolgt.

Pullback/Macro-to-Micro Lift ($\mathcal{P}$). Der Rückweg *Makro* $\rightarrow$ *Mikro* ist *kein* “Fine-Graining” im Sinne einer (im Allgemeinen nicht eindeutigen) Inversion des Coarse-Grainings. Stattdessen ist er als *deterministische Pullback-Regel* $\mathcal{P}$ festgelegt, die makroskopische Randinformation (Mismatch) in mikroskopische Leitwert-Updates zurückprojiziert:

$$\{(\Phi_{n,w}^{\text{glob}}, \Phi_{n,w}^{\text{loc}})\}_w \xrightarrow{\mathcal{P}} \Delta_n : E \rightarrow \mathbb{R} \mapsto c_{n+1}(e) = c_n(e) \exp(\Delta_n(e)),$$

inklusive der kanonischen λ_n -Reskalierung zur Durchsetzung der Randenergie-Constraint. Die Pullback-Regel $\mathcal{P}$ wird ausschließlich aus den in den folgenden Subsections definierten Größen aufgebaut (Mismatch $D_{n,w}$, Sättigung $\nu_{n,w}^{\text{Sel}}$, Zellgewichte $p_{n,w}$, Edge-Assignment und Δ_n), ohne zusätzliche Freiheitsgrade einzuführen.

Backreaction-Kreisschluss (voll, ohne zusätzliche Ontik). Damit ist die bidirektionale Backreaction im Approximanten vollständig durch den deterministischen Kreisschluss

$$c_n \xrightarrow{\mathcal{C}} \{(\Phi_{n,w}^{\text{glob}}, \Phi_{n,w}^{\text{loc}})\}_w \xrightarrow{\mathcal{P}} \Delta_n \mapsto c_{n+1}$$

gegeben. Der Begriff “Fine-Graining” wird in dieser Spezifikation *nicht* verwendet, um eine Fehlinterpretation als Rekonstruktion ausgespurter Freiheitsgrade zu vermeiden.

4.8 Einziges Mismatch-Funktional (kanonisch, OQS-first): Kanaldivergenz aus global-vs-lokal DtN

Motivation (Subsystem-Effekt). Ein endlicher REAL-Approximant ist stets ein Subsystem des ontischen IDEAL-Graphen. Der *einzig* hier verwendete Mismatch misst daher nicht “gegen $n = 0$ ”, sondern den *Einbettungseffekt* (“Umwelt ausspüren”): *dieselbe* Randmenge B_w erscheint unterschiedlich, je nachdem ob man nur das Zellinnere I_w (eliminieren) oder die gesamte Umwelt $V \setminus B_w$ (eliminieren) ausspürt. Diese Differenz wird als offene Quantendynamik auf B_w (CPTP) formuliert und als Kanaldivergenz gemessen.

Projektierter Trace (konstante Mode entfernt). Die DtN-Matrizen besitzen einen (nahezu) konstanten Nullmodus; zur numerisch robusten, symmetrischen Normierung entfernen wir diesen Mode *ohne* Wahl eines ausgezeichneten Eckindex. Sei $q := |B_w| = d_{\text{vert}}$ und sei $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^q$ der Einsvektor in der Patch-1-Randordnung. Definiere den Projektor

$$\Pi := I - \frac{1}{q} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top,$$

und den projektieren Trace

$$\text{tr}_\perp(M) := \text{tr}(\Pi M \Pi).$$

(i) Lokales DtN auf B_w (Zelle mit interner Umwelt I_w ; äußere Umwelt ausgeblendet). Sei $\Lambda_{n,w}^{\text{loc}}$ das lokale DtN aus Abschnitt “Lokales DtN/Kron auf B_w ”.

(ii) Globales DtN auf B_w (Zelle eingebettet in die (intrinsische) Umwelt $V \setminus B_w$). Partitioniere $V = B_w \sqcup \bar{B}_w$ mit $\bar{B}_w := V \setminus B_w$. Das globale DtN auf B_w ist die Spezialisierung von Definition 1.7 auf $B := B_w$, d. h.

$$(L_n)_{\bar{B}\bar{B},\text{reg}} := \text{RegSPD}((L_n)_{\bar{B}\bar{B}}), \quad \text{valid}_{\text{glob}}(n, w) := \text{cholOK}((L_n)_{\bar{B}\bar{B},\text{reg}}).$$

Falls $\bar{B}_w = \emptyset$, setze deterministisch $\Lambda_{n,w}^{\text{glob}} := (L_n)_{BB}$ und $\text{valid}_{\text{glob}}(n, w) := 1$. Falls $\bar{B}_w \neq \emptyset$ und $\text{valid}_{\text{glob}}(n, w) = 1$, definiere

$$\Lambda_{n,w}^{\text{glob}} := (L_n)_{BB} - (L_n)_{B\bar{B}} \text{ solve}((L_n)_{\bar{B}\bar{B},\text{reg}}, (L_n)_{\bar{B}B}).$$

Falls $\bar{B}_w \neq \emptyset$ und $\text{valid}_{\text{glob}}(n, w) = 0$, setze deterministisch $\Lambda_{n,w}^{\text{glob}} := (L_n)_{BB} + \delta_0((L_n)_{BB})I$.

(iii) **Normierung.** Setze

$$\hat{\Lambda}_{n,w}^x := \frac{\Lambda_{n,w}^x}{\max\{\text{tr}_\perp(\Lambda_{n,w}^x), \varepsilon_{\text{floor}}\}}, \quad x \in \{\text{loc}, \text{glob}\}.$$

(iv) **Aus DtN $\rightarrow$ GKSL-Generator $\rightarrow$ CPTP-Kanal.** Setze $d_{\text{vert}} := |B_w|$ und definiere den *Vertex-Randraum* $\mathcal{H}_{B_w}^{\text{vert}} := \ell^2(B_w) \cong \mathbb{C}^{d_{\text{vert}}}$. Der volle Randhilbertraum ist

$$\mathcal{H}_{B_w} := \mathcal{H}_{B_w}^{\text{vert}} \otimes \mathbb{C}^{d_p}$$

mit kanonischer Basis $\{|i\rangle \otimes |\alpha\rangle : i \in B_w \text{ in Patch-1-Ordnung}, \alpha \in [d_p]\}$.

Für $x \in \{\text{loc}, \text{glob}\}$ und $i \neq j$ definiere deterministisch

$$r_{ij}^x(n, w) := \max\{0, -(\hat{\Lambda}_{n,w}^x)_{ij}\}, \quad L_{ij}^x(n, w) := \sqrt{r_{ij}^x(n, w)} (|i\rangle\langle j| \otimes I_{d_p}) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{B_w}).$$

Der GKSL-Generator auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{B_w})$ ist

$$\mathcal{L}_{n,w}^x(\rho) := \sum_{i \neq j} \left(L_{ij}^x \rho (L_{ij}^x)^\dagger - \frac{1}{2} \{ (L_{ij}^x)^\dagger L_{ij}^x, \rho \} \right),$$

Konvention (Liouville-Repräsentation): Wir identifizieren den Superoperator $\mathcal{L}_{n,w}^x$ mit seiner Liouville-Matrix $\mathbf{L}_{n,w}^x$ bezüglich der kanonischen Operatorbasis $E_{ab} := |a\rangle\langle b|$ (lexikographisch), d. h. $\text{vec}(\mathcal{L}_{n,w}^x(\rho)) = \mathbf{L}_{n,w}^x \text{vec}(\rho)$. Der zugehörige CPTP-Kanal (ein Zeitschritt) ist

$$\Phi_{n,w}^x := \exp_{\text{det}}(\Delta t \mathbf{L}_{n,w}^x), \quad \Delta t := 1 \text{ (kanonisch)}.$$

Bemerkung 4.1 (Mismatch und interne Freiheitsgrade). Da alle L_{ij}^x als $(|i\rangle\langle j|) \otimes I_{d_p}$ wirken, faktorisiert der GKSL-Generator und damit auch der Kanal deterministisch als

$$\Phi_{n,w}^x = \phi_{n,w}^x \otimes \text{id}_{d_p}$$

für einen eindeutig bestimmten Kanal $\phi_{n,w}^x$ auf $\mathcal{H}_{B_w}^{\text{vert}}$. Damit ist der *unregularisierte* Choi-Term $J(\Phi_{n,w}^x)$ (und damit $S(J(\Phi^{\text{glob}}) \| J(\Phi^{\text{loc}}))$) additiv und inhaltlich unabhängig von d_p . Die Totalitäts-Regularisierung J_ε sowie die Normierung über $\log(d^2)$ (mit $d = \dim(\mathcal{H}_{B_w})$) können jedoch eine (kontrollierte) d_p -Abhängigkeit im numerischen Mismatch-Wert einführen.

(Hinweis: Ein expliziter Zustand ρ ist für den Mismatch nicht erforderlich; die Dynamik wird kanalbasiert und zustandsunabhängig verglichen.)

(v) **Kanaldivergenz via Choi-Zustände (einziges Mismatch).** Sei $d := \dim(\mathcal{H}_{B_w}) = |B_w| d_p$. Nummeriere die kanonische Produktbasis $\{|i\rangle \otimes |\alpha\rangle : i \in B_w \text{ (Patch-1-Ordnung)}, \alpha \in [d_p]\}$ in lexikographischer Ordnung als $(|a\rangle)_{a=1}^d$ und setze $|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{a=1}^d |a\rangle \otimes |a\rangle$. Definiere den normalisierten Choi-Zustand

$$J(\Phi) := (\Phi \otimes \text{id})(|\Omega\rangle\langle\Omega|),$$

und eine deterministische Totalitäts-Regularisierung

$$J_\varepsilon(\Phi) := (1 - \varepsilon_0) J(\Phi) + \varepsilon_0 \frac{I_{d^2}}{d^2}, \quad \varepsilon_0 := \max\{r_\star^{L_{\text{max}}}, \varepsilon_{\text{floor}}\}.$$

Der (quantum) relative-Entropie-Mismatch ist

$$\text{Mismatch}(n, w) := \frac{S\left(J_\varepsilon(\Phi_{n,w}^{\text{glob}}) \| J_\varepsilon(\Phi_{n,w}^{\text{loc}})\right)}{\log(d^2)} \geq 0 \text{ (i. A. nicht auf } [0, 1] \text{ beschränkt)},$$

wobei $S(\rho \| \sigma)$ die Umegaki-Relative-Entropie ist.[13, 14]

Bemerkung 4.2 (Warum Umegaki-Relative-Entropie (und nicht „KL der Choi-Matrizen“)). Die Choi-Objekte $J_\varepsilon(\Phi)$ sind (im Allgemeinen nicht kommutierende) Dichtematrizen. Die klassische Kullback–Leibler-Divergenz ist nur für kommutierende (gleichzeitig diagonalisierbare) Zustände bzw. klassische Wahrscheinlichkeitsvektoren kanonisch definiert. In der nichtkommutativen Situation ist die Umegaki-Relative-Entropie $S(\rho\|\sigma) = \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma))$ die standardmäßige quanteninformationstheoretische Verallgemeinerung; sie reduziert sich im kommutativen Fall exakt auf die klassische KL-Divergenz. Andere Kanaldivergenzen (z. B. sandwiched Rényi, trace distance, Bures) sind möglich, werden hier jedoch *nicht* zugelassen, weil sie eine andere Mismatch-Policy und damit eine andere Modellvariante definieren würden.

Normativ setzen wir

$$S(\rho\|\sigma) := \begin{cases} \text{Tr}(\rho(\log_{\det}(\rho) - \log_{\det}(\sigma))), & \text{supp}(\rho) \subseteq \text{supp}(\sigma), \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alle Raten, Kanäle und Choi-Zustände in diesem Abschnitt sind in der kanonischen Randbasis der Patch-1-Ordnung $(b_{w,1}, \dots, b_{w,d_{\text{vert}}})$ definiert. Dies ist das *einzige* zugelassene *skalare* Mismatch-Funktional (Kanaldivergenz via Umegaki-Relative-Entropie der Choi-Zustände); alle anderen skalaren Divergenzen definieren eine *andere* Modellvariante und werden verworfen. Die Größen Δr_{ij} bzw. $\Delta r_{\{i,j\}}$ sind dagegen *abgeleitete Pullback-Features* aus denselben $\hat{\Lambda}_{n,w}^{\text{loc/glob}}$ und dienen ausschließlich der deterministischen Rand- $\rightarrow$ -Zell-Projektion (vgl. § 4.9).

(vi) Raten-Differenz (für Edge-Energiegewichte). Definiere zunächst die deterministischen *orientierten* Ratendifferenzen

$$\Delta r_{ij}(n, w) := |r_{ij}^{\text{glob}}(n, w) - r_{ij}^{\text{loc}}(n, w)|, \quad i \neq j.$$

Für symmetrische Randproben und Gewichte arbeiten wir anschließend mit der *ungeordneten Paar-Divergenz*

$$\Delta r_{\{i,j\}}(n, w) := \Delta r_{ij}(n, w) + \Delta r_{ji}(n, w), \quad 0 \leq i < j \leq q - 1,$$

wobei $q := |B_w|$ und die Indizes der Patch-1-Randordnung folgen. Optional (Diagnostik) definieren wir die Knotenintensitäten

$$s_i(n, w) := \sum_{j \neq i} \Delta r_{\{\min\{i,j\}, \max\{i,j\}\}}(n, w).$$

Bemerkung 4.3 (Sinn der Wahl $|\cdot|$ in Δr_{ij} (Symmetrie, Interpretierbarkeit)). Die Absolutdifferenz in Δr_{ij} ist eine normativ gewählte, symmetrische Divergenz zwischen den lokal und global induzierten Übergangsintensitäten. Sie erfüllt $\Delta r_{ij} = 0$ genau dann, wenn die entsprechenden Raten übereinstimmen, und ist basisabhängig (über die Patch-1-Kanonisierung). Die so entstehenden Edge-Gewichte sind daher *operational* als “lokal vs. global inkonsistente Übergangsintensität” interpretierbar, ohne eine zusätzliche probabilistische Modellierung einzuführen.

4.9 Kappa-Sättigung und Override (kanonisch, OQS-first)

Definition. Da $\text{Mismatch}_n(w) \geq 0$, setze kanonisch

$$\kappa_n(w) := \sigma(\text{Mismatch}_n(w)).$$

Definition 4.1 (Zulässige Sättigungsfunktionen (Driver-Nichtlinearität; normativ)). Eine Funktion $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ heißt *zulässig*, wenn sie die Axiome erfüllt:

(S1) σ ist ungerade: $\sigma(-x) = -\sigma(x)$ und $\sigma(0) = 0$.

(S2) σ ist monoton nicht-fallend.

(S3) σ ist 1-Lipschitz: $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(S4) σ ist stetig differenzierbar mit $\sigma'(0) = 1$.

Normativer Default ist $\sigma(x) = \tanh(x)$. Andere σ sind nur zulässig, wenn (S1)–(S4) erfüllt und die Benchmark-Tests (Pfeiler A) bestanden sind.

Proposition 4.1 (Stabilitätsrolle der Sättigung (bounded feedback)). *Sei σ zulässig. Dann gilt $|\kappa_n(w)| \leq 1$ für alle n, w , und die Rückkopplungsstärke pro Zelle ist a priori beschränkt. Insbesondere verhindert die Sättigung, dass einzelne große Mismatch-Werte $\text{Mismatch}_n(w)$ die Updates dominieren (“runaway”), und macht den Driver-B als numerische Dynamik robust.*

Beweis (Skizze). Da $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ abbildet, folgt sofort $|\kappa_n(w)| \leq 1$. Die Lipschitz-Eigenschaft (S3) stellt zudem sicher, dass kleine Änderungen in $\text{Mismatch}_n(w)$ keine überproportionalen Änderungen der Rückkopplung verursachen. Die konkrete quantitative Schranke für $\Delta_n(e)$ folgt aus der jeweiligen Aggregationsformel (Gewichte α_k summieren zu 1 und $\kappa_n(w)$ ist beschränkt), und ist im Report als Monitoringgröße zu führen. $\square$

Bemerkung 4.4 (Default $\sigma = \tanh$ (Stabilität, Kalibrierbarkeit, Benchmarks)). Die Wahl $\kappa = \tanh(\text{Mismatch})$ ist eine *Modell-Policy* (nicht aus tieferen Prinzipien abgeleitet), deren Zweck rein stabilitätstechnisch ist: $\tanh$ ist glatt, ungerade, streng monoton und saturiert, so dass $|\kappa| < 1$ und die Leitwert-Updates global beschränkt bleiben. Jede Alternative muss normativ dieselben Minimalanforderungen erfüllen (ungerade, monoton, Lipschitz, $f(0) = 0$, $\sup |f| < 1$); die konkrete Form ist ein Kalibriergegenstand (empirisch einzugrenzen), kein “versteckter” Freiheitsgrad.

Validity / Soft-Fallback (normativ). In den Definitionen der lokalen und globalen DtN-Operatoren werden Validity-Bits $\text{valid}(n, w)$, $\text{valid}_{\text{glob}}(n, w) \in \{0, 1\}$ erzeugt. Wir definieren das deterministische Fallback-Flag

$$f(n, w) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \text{valid}(n, w) = 0 \text{ oder } \text{valid}_{\text{glob}}(n, w) = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 4.2 (Soft-Fallback-Policy (kanonisch)). Wir verwenden *keinen* harten Override $\kappa_n(w) := 0$. Stattdessen wird die Rückkopplung in Fallback-Fällen *weich* gedämpft. Fixiere

$$\eta_{\text{soft}} := 10^{-2}.$$

Definiere zunächst den Rohfaktor aus dem Mismatch

$$\kappa_n^{\text{raw}}(w) := \sigma(\text{Mismatch}_n(w)),$$

wobei σ eine zulässige Sättigungsfunktion ist (Def. 4.1; Default $\sigma = \tanh$). Dann setzen wir normativ

$$\kappa_n(w) := \begin{cases} \kappa_n^{\text{raw}}(w), & f(n, w) = 0, \\ \eta_{\text{soft}} \cdot \kappa_n^{\text{raw}}(w), & f(n, w) = 1. \end{cases}$$

Die Soft-Fallback-Rate $p_{\text{fb}}(n)$ sowie die Gates sind in Def. 2.3 fixiert.

Hard/Soft-Fallback-Klassifikation (normativ). Soft-Fallback kann numerische Probleme *maskieren*. Daher wird jede Fallback-Instanz zusätzlich deterministisch in *hard* vs. *soft* klassifiziert, anhand der Rohstärke $|\kappa_n^{\text{raw}}(w)|$. Fixiere den Schwellwert $\kappa_{\text{raw}, \text{thr}}$ in Def. 2.3. Definiere

$$f_{\text{hard}}(n, w) := \mathbf{1}\{f(n, w) = 1 \wedge |\kappa_n^{\text{raw}}(w)| \geq \kappa_{\text{raw}, \text{thr}}\}, \quad f_{\text{soft}}(n, w) := \mathbf{1}\{f(n, w) = 1\} - f_{\text{hard}}(n, w).$$

Die zugehörigen Raten $p_{\text{fb}, \text{hard}}(n)$ und $p_{\text{fb}, \text{soft}}(n)$ sind *Pflicht-Logs* und unterliegen den Gates in Def. 2.3. Insbesondere ist eine hohe Hard-Fallback-Rate als `RUN_INVALID(HARD_FAIL_RATE)` zu markieren.

Spezialfall $w = \emptyset$. Der Fall $w = \emptyset$ wird als Rand- B_0 -Zelle interpretiert: $B_\emptyset := B_0$ und $\text{Mismatch}_n(\emptyset)$, $\kappa_n(\emptyset)$ werden exakt nach obiger Definition berechnet (mit loc/glob auf B_0).

4.10 Zellverteilung p und Zentrierung $\tilde{p}$ (antwort-/energie-/kanalbasiert; OQS-first)

Ziel. Die Edge-Gewichte sollen *nicht* aus c_n selbst stammen (das wäre im homogenen Startzustand trivial), sondern aus dem *Subsystem-Einbettungseffekt* der offenen Randdynamik. Dazu projizieren wir die Ratendifferenzen $\Delta r_{ij}(n, w)$ deterministisch als Randproben in das Zellinnere und werten die resultierende Dirichlet-Energie auf Kanten aus.

Randproben (kanonisch, symmetrisch über Paare). Es wird kein Ankerindex verwendet. Für $q := |B_w|$ definieren wir Randproben über *ungeordnete Paare* $0 \leq i < j \leq q - 1$ der Patch-1-Randordnung. Für jedes Paar (i, j) setze die Randbedingung

$$u_{B_w}^{(ij)}(i) := 1, \quad u_{B_w}^{(ij)}(j) := -1, \quad u_{B_w}^{(ij)}(k) := 0 \quad (k \in B_w \setminus \{i, j\}),$$

und bestimme die eindeutige harmonische Fortsetzung $u_{n,w}^{(ij)} : V_w \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u_I^{(ij)} := \text{solve}(\text{Reg}_{\text{SPD}}((Q_{n,w})_{II}), -(Q_{n,w})_{IB} u_B^{(ij)}).$$

Schlägt solve deterministisch fehl, so wird (n, w) in dieser Randprojektionsstufe als numerisch invalid markiert und wir setzen deterministisch $u_I^{(ij)} \equiv 0$ (damit $\tilde{p}_{n,w} \equiv 0$ in diesem Schritt). Falls $I_w = \emptyset$, setze deterministisch $u_{n,w}^{(ij)} \equiv u_{B_w}^{(ij)}$.

Probengewichte aus OQS-Raten. Setze (mit $\Delta r_{\{i,j\}}(n, w)$ aus der Mismatch-Definition)

$$\omega_{\{i,j\}}(n, w) := \frac{\Delta r_{\{i,j\}}(n, w) + \varepsilon_{\text{floor}}}{\sum_{0 \leq a < b \leq q-1} (\Delta r_{\{a,b\}}(n, w) + \varepsilon_{\text{floor}})}, \quad 0 \leq i < j \leq q - 1.$$

Trajektorienmodus (deterministische Kippelment-Auswahl; optional). Optional kann anstelle der Erwartungsgewichtung eine *konditionierte* Auswahl eines aktiven Paares pro (n, w) erfolgen. Definiere die diskrete Verteilung $\pi_a(n, w) := \omega_a(n, w)$ auf $\mathcal{A}_w$ und wähle deterministisch

$$a^*(n, w) := \text{Sel}(\theta_{n,w}, \pi(\cdot; n, w)) \in \mathcal{A}_w \cup \{\perp\},$$

wobei $\theta_{n,w} \in [0, 1]$ ein (unbeobachteter) deterministischer Umweltzustand ist und Sel die in Subsection 1.7 definierte, tie-sichere Auswahlfunktion bezeichnet. Falls $a^*(n, w) = \perp$, wird in diesem Schritt *automatisch* im Erwartungsmodus fortgefahren (keine künstliche Symmetriebrechung).

Im Trajektorienmodus wird anschließend $\omega_a(n, w)$ durch $\omega_a^{\text{traj}}(n, w)$ wie oben festgelegt ersetzt; im Gleichstandsfall $a^*(n, w) = \perp$ bleibt $\omega^{\text{traj}} = \omega$ (Erwartungsmodus).

Antwort-Energie pro Kante (roh und gewichtet). Für $w \in S_\bullet^k$ ($k \geq 1$) und eine Kante $e = \{a, b\} \in E$ definieren wir zunächst die *rohe* antwort-/kanalbasierte Edge-Energie

$$\mathcal{E}_{n,w}^{\text{raw}}(e) := \sum_{0 \leq i < j \leq q-1} \omega_{\{i,j\}}(n, w) c_n(e) (u_{n,w}^{(ij)}(a) - u_{n,w}^{(ij)}(b))^2.$$

Um die äquivalente Mehrzuordnung (bei maximalen LCP-Ties) konsistent zu berücksichtigen, setzen wir die *gewichtet* zur Zelle beitragende Energie

$$\mathcal{E}_{n,w}(e) := \mu_{k,w}(e) \mathcal{E}_{n,w}^{\text{raw}}(e),$$

wobei $\mu_{k,w}(e) \in [0, 1]$ aus der LCP-Maß-Zuordnung stammt. Im Nicht-Tie-Fall ist $\mu_{k,w}(e) \in \{0, 1\}$ und die Definition reduziert auf die bisherige.

Normierung zu p und Zentrierung (maß-basiert). Definiere die Zellkantenmasse

$$Z_w^{(k)} := \sum_{e \in E} \mu_{k,w}(e) = \sum_{e \in E_w^{(k)}} \mu_{k,w}(e).$$

Falls $Z_w^{(k)} > 0$, definiere die Referenzverteilung

$$\bar{p}_w(e) := \frac{\mu_{k,w}(e)}{Z_w^{(k)}}, \quad (\text{damit } \sum_{e \in E} \bar{p}_w(e) = 1),$$

und setze

$$p_{n,w}(e) := \frac{\mathcal{E}_{n,w}(e) + \varepsilon_0 \bar{p}_w(e)}{\sum_{e' \in E} \mathcal{E}_{n,w}(e') + \varepsilon_0}, \quad \tilde{p}_{n,w}(e) := p_{n,w}(e) - \bar{p}_w(e).$$

Falls $Z_w^{(k)} = 0$ (d.h. keine adressierten Kanten), setze deterministisch $\tilde{p}_{n,w} \equiv 0$.

Randfall $w = \emptyset$ (nur rand-inzidente Kanten). Analog definiere $\mathcal{E}_{n,\emptyset}(e)$ über die obigen Proben auf B_0 , aber beschränke die Auswertung auf $e \in E_\emptyset$. Setze für $|E_\emptyset| > 0$

$$p_{n,\emptyset}(e) := \frac{\mathcal{E}_{n,\emptyset}(e) + \varepsilon_0/|E_\emptyset|}{\sum_{e' \in E_\emptyset} \mathcal{E}_{n,\emptyset}(e') + \varepsilon_0}, \quad \bar{p}_\emptyset := \frac{1}{|E_\emptyset|}, \quad \tilde{p}_{n,\emptyset}(e) := p_{n,\emptyset}(e) - \bar{p}_\emptyset,$$

und falls $|E_\emptyset| = 0$ setze $\tilde{p}_{n,\emptyset} \equiv 0$.

4.11 Update-Exponent Δ_n (rand-inzident inklusive)

Für $e \in E$ definiere

$$\begin{aligned} \Delta_n(e) := & - \sum_{k=1}^{K_{\max}} \alpha_k \sum_{w \in W_k(e)} \mu_{k,w}(e) \kappa_n(w) \tilde{p}_{n,w}(e) \quad (\text{für } K_{\max} = 0 \text{ ist die Summe leer}) \\ & - \mu_{0,\emptyset}(e) \kappa_n(\emptyset) \tilde{p}_{n,\emptyset}(e). \end{aligned}$$

4.12 Leitwert-Update (alle Kanten) + Randenergie-Erhaltung (kein Freeze)

Provisorischer Update-Schritt.

$$\tilde{c}_{n+1}(e) := c_n(e) \exp(\Delta_n(e)), \quad \forall e \in E.$$

Rand-Normalisierung über λ_n . Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere

$$c_{n+1}^{(\lambda)}(e) := \begin{cases} \tilde{c}_{n+1}(e) \exp(\lambda), & e \in E_\partial, \\ \tilde{c}_{n+1}(e), & e \notin E_\partial. \end{cases}$$

Sei $\Lambda_{n+1}^{(\lambda)}$ die aus $c_{n+1}^{(\lambda)}$ gebildete DtN-Matrix gemäß der obigen Definition des globalen DtN/Kron auf B_0 , und $\mathcal{E}_{B_0,n+1}^{\text{tot}}(\lambda)$ die daraus berechnete Randenergie-Summe.

Wir wählen λ_n deterministisch so, dass

$$\mathcal{E}_{B_0,n+1}^{\text{tot}}(\lambda_n) = \mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}}.$$

Bemerkung 4.5 (Interpretation der Randenergie-Constraint (Gauge-Fix; keine Naturbehauptung)). Die λ_n -Reskalierung ist eine *normative Constraint-Policy*, die eine triviale globale Drift (reine Skalierung der Rand-Leitwerte E_∂) entfernt und die Driver-Dynamik auf *Formänderungen* der Antwort/Geometrie fokussiert. Operational sorgt sie dafür, dass der Driver-B

nicht durch einen ungebundenen Gesamtmaßstab dominiert wird, sondern dass die Rückkopplung über Mismatch/Response tatsächlich „Struktur“ verändern muss. Diese Fixierung ist mit Regularisierungs-/Renormierungskonventionen in anderen Bereichen der Physik vergleichbar: sie definiert die Vergleichsskala und ist als solche *Teil der Spezifikation*, nicht als frei fitbarer Parameter zu verstehen. Alternative Constraints (z. B. Fixierung anderer globaler Funktionale) sind möglich, würden aber eine andere Modellvariante definieren.

Die Bestimmung erfolgt deterministisch durch Bracketing + Bisektion mit fest fixierten Budgets und Toleranzen.

Normativer Algorithmus (Bracketing + Bisektion). Definiere die Zielfunktion

$$f(\lambda) := \mathcal{E}_{B_0, n+1}^{\text{tot}}(\lambda) - \mathcal{E}_{B_0, n}^{\text{tot}}.$$

Fixiere deterministisch (rein numerische Policy, keine Modellparameter)

$$h_0 := 1, \quad \gamma := 2, \quad N_{\text{expand}} := 48, \quad N_{\text{bisect}} := 64,$$

sowie die Energietoleranz

$$T_E := \max\left\{64 \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, |\mathcal{E}_{B_0, n}^{\text{tot}}|\}, 64 \varepsilon_{\text{floor}} \cdot |\mathcal{E}_{B_0, n}^{\text{tot}}|\right\}.$$

1. **Trivial-Fall.** Setze $\lambda = 0$. Falls $|f(0)| \leq T_E$, setze $\lambda_n := 0$.
2. **Bracketing (symmetrische Expansion).** Andernfalls suche deterministisch ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und $f(a)f(b) \leq 0$ durch: für $m = 0, 1, \dots, N_{\text{expand}}$ setze $h := h_0 \gamma^m$ und berechne $f(+h)$ und $f(-h)$ (in dieser Reihenfolge). Falls $f(0)f(+h) \leq 0$, setze $[a, b] := [0, +h]$. Falls $f(0)f(-h) \leq 0$, setze $[a, b] := [-h, 0]$. Falls kein Bracket gefunden wird, greift der deterministische Fallback (siehe unten).
3. **Bisektion.** Gegeben ein Bracket $[a, b]$: führe für $t = 1, \dots, N_{\text{bisect}}$ aus: setze $m := (a + b)/2$ und berechne $f(m)$. Falls $|f(m)| \leq T_E$ oder $m \in \{a, b\}$ (float64-Stagnation), stoppe und setze $\lambda_n := m$. Andernfalls ersetze deterministisch das Intervall durch das Vorzeichenkriterium: falls $f(a)f(m) \leq 0$ setze $b := m$, sonst $a := m$. Nach N_{bisect} Schritten setze $\lambda_n := m$ (letzter Mittelpunkt).

Deterministischer Fallback. Falls das Bracketing/Bisection-Verfahren innerhalb eines festen Iterationsbudgets keine Lösung findet, setze deterministisch $\lambda_n := 0$ und markiere den Schritt als numerisch invalid (Logging), ohne die Definition zu verlassen.

Finaler Schritt.

$$c_{n+1}(e) := c_{n+1}^{(\lambda_n)}(e), \quad \forall e \in E.$$

5 Literatur (Primärquellen)

Literatur

- [1] J. Kigami, *Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993), 721–755.
- [2] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge University Press, 2001.
- [3] R. S. Strichartz, *The Laplacian on the Sierpinski gasket via the method of averages*, Pacific J. Math. 201 (2001), 241–263.

- [4] M. Keller, D. Lenz, *Dirichlet forms and stochastic completeness of graphs and subgraphs*, J. Reine Angew. Math. 666 (2012), 189–223.
- [5] F. Dörfler, F. Bullo, *Kron Reduction of Graphs with Applications to Electrical Networks*, IEEE Trans. Circuits Syst. I 60 (2013), 150–163; arXiv:1102.2950.
- [6] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random Walks and Electric Networks*, Mathematical Association of America (1984).
- [7] W. F. Stinespring, *Positive functions on C^* -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 211–216.
- [8] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys. 48 (1976), 119–130. DOI: 10.1007/BF01608499.
- [9] V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, *Completely positive dynamical semigroups of N -level systems*, J. Math. Phys. 17 (1976), 821–825. DOI: 10.1063/1.522979.
- [10] S. Attal, Y. Pautrat, *From repeated to continuous quantum interactions*, Ann. Henri Poincaré 7 (2006), 59–104. DOI: 10.1007/s00023-005-0242-8.
- [11] L. Bruneau, A. Joye, M. Merkli, *Repeated interactions in open quantum systems*, J. Math. Phys. 55 (2014), 075204.
- [12] N. J. Higham, The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 26(4):1179–1193, 2005.
- [13] H. Umegaki, Conditional expectations in an operator algebra IV (entropy and information). *Kodai Mathematical Seminar Reports* 14(2):59–85, 1962.
- [14] D. Petz, Sufficient subalgebras and the relative entropy of states of a von Neumann algebra. *Communications in Mathematical Physics* 105:123–131, 1986.
- [15] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd rev. and extended ed., De Gruyter Studies in Mathematics 19, de Gruyter, 2010.
- [16] E. B. Curtis and J. A. Morrow, “The Dirichlet to Neumann map for a resistor network,” *SIAM Journal on Applied Mathematics* 51(4), 1011–1029 (1991). doi:10.1137/0151051.
- [17] E. B. Curtis and J. A. Morrow, *Inverse Problems for Electrical Networks*, Series on Applied Mathematics, Vol. 13, World Scientific, 2000.
- [18] K. Kraus, “General state changes in quantum theory,” *Annals of Physics* 64(2), 311–335 (1971). doi:10.1016/0003-4916(71)90108-4.
- [19] A. Yu. Kitaev, “Quantum computations: algorithms and error correction,” *Russian Mathematical Surveys* 52(6), 1191–1249 (1997). doi:10.1070/RM1997v052n06ABEH002155.
- [20] J. Watrous, “Notes on super-operator norms induced by Schatten norms,” *Quantum Information & Computation* 5(1), 58–68 (2005). doi:10.26421/QIC5.1-6.
- [21] D. J. Klein and M. Randić, Resistance distance. *Journal of Mathematical Chemistry* 12(1):81–95, 1993. DOI: 10.1007/BF01164627.
- [22] W. S. Torgerson, Multidimensional scaling: I. Theory and method. *Psychometrika* 17:401–419, 1952.
- [23] J. C. Gower, Some distance properties of latent root and vector methods used in multivariate analysis. *Biometrika* 53(3–4):325–338, 1966.

- [24] J. B. Kruskal, Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis. *Psychometrika* **29**(1):1–27, 1964.

A Symbolverzeichnis (tabellarisch)

Hinweis zur Symbol→Modul-Zuordnung (normativ). Die tabellarische Symbolauflistung ist *normativ* im Sinne einer vollständigen, dokumentierten Notation. Zusätzlich legt diese Spezifikation eine *kanonische* Modulstruktur der Referenz-Implementierung (`realgraph_oqs`) fest und fixiert die Symbol→Modul-Zuordnung *normativ* (Anhang B). Die kanonische Referenzdatei `symbol_module_map_v4_rev6.json` (SHA256: `e9505a32dacfbf2a8aebf45d1214767e9215220acac1e4f4a6672`) ist Bestandteil dieser Spezifikation; Änderungen daran sind versionspflichtig und müssen durch Traceability-/Coverage-Gates nachgewiesen werden.

A.1 Abschnitt 1: IDEAL-Trunk

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
A. Modellwahl, Indizes, Diskretisierung		
$\bullet \in \{\text{SG}, \text{ST}\}$	<i>frei</i> (Modellvariante)	Wählt den IDEAL-Substrattyp (Sierpinski Gasket bzw. Tetraeder) und damit Alphabetgröße, Randgröße und Symmetriestruktur.
$S_\bullet$	<i>abgeleitet</i> aus $\bullet$	Alphabet der IFS-Adressierung: $\{0, 1, 2\}$ (SG) bzw. $\{0, 1, 2, 3\}$ (ST).
$q := S_\bullet $	<i>abgeleitet</i>	Eck-/Randanzahl: zugleich $ B_0 $ und Dimension der Randantworten (Dirichlet-to-Neumann).
$L \in \mathbb{N}_0$	Index (kein Modellparameter)	Wortlänge / Approximationsstufe des Trunks; dient zur Definition von $V_L^\bullet, E_L^\bullet$.
$L_{\max} \in \mathbb{N}_0$	<i>frei</i> (numerischer Cutoff)	Maximales Trunk-Level der endlichen Darstellung; bestimmt $ V , E $ und damit Rechenaufwand/Approximation.
ℓ, k	Indizes	Level-Indizes (z. B. Inklusion $\iota_{\ell \rightarrow L}$, Zell-/Patch-Tiefen).
$n \in \mathbb{N}_0$	Index (Dynamikschritt)	Diskreter Evolutions-/Feedback-Schritt; im IDEAL-Teil für Seed-/Konsistenzbegriffe benutzt, später in REAL/Driver-B maßgeblich.
$d_p \in \mathbb{N}$	<i>frei</i> (Modellwahl)	Interne Freiheitsgrade pro Vertex (“interne Dimension”); skaliert den lokalen Hilbertraum $\mathbb{C}^{d_p}$.
$R \in \mathbb{N}$	Begriffs-/Skalenparameter	Lokalitätsradius in der Graphmetrik d_G ; definiert, was als “lokal” im prä-geometrischen Sinn gilt.
B. Wörter, Adressen, Quotienten-Vertices		
$w \in S_\bullet^L$	<i>abgeleitet</i> (IFS-Notation)	Zelladresse/Wort der Länge L ; indexiert Subzellen und ihre Randmengen B_w .
$u, v \in S_\bullet^L$	Notation/Index	Allgemeine Worte/Adressen; u. a. zur Definition von LCP/Identifikationen.
$\emptyset$	<i>fixiert</i>	Leeres Wort (Root-Adresse); referenziert das globale Root-Patch.
a^m	Notation	m -fache Wiederholung eines Symbols $a \in S_\bullet$; dient zur kanonischen Einbettung (Fixpunkt-Padding).
$\hat{V}_L := S_\bullet^L \times S_\bullet$	<i>abgeleitet</i>	Roh-Vertexmenge vor Identifikation; Paare (Adresse, Ecke).
$\sim_L$	<i>fixiert</i> (Äquivalenzrelation)	Constant-tail Identifikation (p.c.f.-Gluing): implementiert das “Verkleben” gemeinsamer Ecken benachbarter Zellen; erzeugt den SG/ST-Graphen.
$V_L^\bullet := \hat{V}_L / \sim_L$	<i>abgeleitet</i>	Quotienten-Vertexmenge der Level- L -Approximation des IDEAL-Graphen.
$E_L^\bullet$	<i>abgeleitet</i>	Kantenmenge der Level- L -Approximation (loop-less); entsteht aus der p.c.f.-Nachbarschaftsregel.
C. Inklusion, Trunk, unendliches Objekt		

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$\iota_{\ell \rightarrow L} : V_\ell^\bullet \rightarrow V_L^\bullet$	<i>fixiert</i> (kanonische Inklusion)	Deterministische Einbettung niedriger Level in höhere Level via Fixpunkt-Padding; macht Levelvergleiche wohldefiniert.
$V_\infty^\bullet := \varinjlim_L V_L^\bullet$	<i>abgeleitet</i>	Induktiver Limes der Vertexmengen; formales “ $L_{\max} = \infty$ ”-Objekt.
$E_\infty^\bullet := \varinjlim_L E_L^\bullet$	<i>abgeleitet</i>	Induktiver Limes der Kantenmengen; Topologie des unendlichen IDEAL-Graphen.
$G_\infty^\bullet := (V_\infty^\bullet, E_\infty^\bullet)$	<i>abgeleitet</i>	Unendlicher IDEAL-Graph (ontisches Postulat), auf den der endliche Trunk approximiert.
$K_L := \iota_L(V_L^\bullet) \subset V_\infty^\bullet$	<i>abgeleitet</i>	Kanonischer Trunk (eingebettete Level- L -Approximation) innerhalb des unendlichen Objekts.
$V := V_{L_{\max}}^\bullet, E := E_{L_{\max}}^\bullet$	<i>abgeleitet</i>	Konkreter endlicher Arbeitsgraph im Run; bestimmt Dimensionen aller Matrizen/Operatoren.
D. Hilberträume, Projektionen, Support		
$\mathcal{H}_{\text{tot}} := \ell^2(V_\infty^\bullet) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$	<i>abgeleitet</i>	Globaler (prä-geometrischer) Zustandsraum: Vertex-Amplituden $\ell^2(V)$ plus interne DOFs.
$\mathcal{H}_S := \ell^2(S) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$	<i>abgeleitet</i>	Support-Subraum für $S \subseteq V$; ersetzt Tensorfaktorisierung durch direkte Summenstruktur.
P_S	<i>abgeleitet</i> (Projektor)	Orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_S$; verwendet für Reduktionen/Restriktionen.
$B \subseteq V$	<i>frei</i> (Subsystemwahl)	Ausgewähltes Subsystem (z. B. Rand B_0 oder Zellrand B_w); definiert Reduktionen, DtN, lokale Observablen.
$\bar{B} := V \setminus B$	<i>abgeleitet</i>	Komplement (“Umwelt” relativ zu B) innerhalb der direkten Summenstruktur.
E. Randmengen, Zellränder, kanonische Ordnung		
$b_i = [(i^{L_{\max}}, i)]$	<i>abgeleitet</i>	Kanonische Randknoten (Corner-Vertices) des Level- $L_{\max}$ -Trunks.
$B_0 := \{b_i : i \in S_\bullet\}$	<i>abgeleitet</i>	Globaler IDEAL-Rand (hochsymmetrisch); Referenzrand für globale DtN-Objekte und Randenergie-Tests.
$b_{w,i} = [(w i^{L_{\max}- w }, i)]$	<i>abgeleitet</i>	Randknoten der Zelle mit Adresse w und Ecke i (Zell-Corner).
$B_w := \{b_{w,i} : i \in S_\bullet\}$	<i>abgeleitet</i>	Randmenge der adressierten Zelle w ; Grundlage lokaler Reduktionen (DtN auf B_w).
$\prec, \text{id}(x) := \text{rank}_\prec(x)$	<i>fixiert</i> (kanonische Ordnung)	Deterministische Totalordnung/IDs auf Vertices und Wörtern; verhindert Mehrdeutigkeit (Tie-breaking, Hashes, Grounding).
F. Prä-geometrische Lokalität (Graphmetrik)		

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$d_G(\cdot, \cdot)$	<i>abgeleitet</i>	Ungewichtete Graphdistanz auf $G = (V, E)$; definiert lokale Nachbarschaften und “ R -lokale” Operatoren.
R -lokal	Definition (keine freie Physik)	Ein Operator/Einfluss ist R -lokal, wenn sein Support (als Vertexmenge) im R -Ball bzgl. d_G liegt.
G. Deterministischer Seed (Umwelt-Mikrostruktur) und Äquivarianz		
$c_n : E \rightarrow (0, \infty)$	Zustandsgröße (später REAL)	Kantenleitwerte zum Schritt n ; in Abschnitt 1 als allgemeines Symbol für gewichtete Laplacians bereits vorausgenommen.
L_n	<i>abgeleitet</i> aus c_n	Gewichtete Laplace-Matrix des Graphen (Dirichlet-Form); Eingabe für DtN/Kron-Reduktionen und Seeds.
$\text{DtN}_B(L_n)$	<i>abgeleitet</i> (Schur/Kron)	Dirichlet-to-Neumann-Abbildung auf Rand B ; kondensiert Innen-DOFs zu einer Randantwortmatrix.
$\text{Seed}_n(w) := \Lambda_{n,w}^{\text{glob}} :=$	<i>abgeleitet</i>	Deterministischer Zell-Seed: global kondensierte Randantwort der Zelle w ; Basis für Äquivariantests und Trajektorieninitialisierung.
$\text{DtN}_{B_w}(L_n)$		
$\text{Aut}_{B_0}(V)$	<i>abgeleitet</i>	Automorphismengruppe des Trunks, die B_0 als Menge fixiert; kodiert IDEAL-Symmetrie.
$\text{Stab}_{B_0}(L_n)$	<i>abgeleitet</i>	Stabilisator-Untergruppe von $\text{Aut}_{B_0}(V)$, die zusätzlich L_n (also die Gewichtung) invariant lässt.
$w \sim_n w'$	<i>abgeleitet</i>	Zelläquivalenz unter Symmetrien: w und w' gelten als “gleich” zum Schritt n , wenn ihre Seeds bis auf zulässige Permutationen übereinstimmen.
H. Deterministische Trajektorienauswahl (ohne Stochastik)		
$S_w := \frac{1}{2}(\text{Seed}_0(w) + \text{Seed}_0(w)^\top)$	<i>abgeleitet</i>	Symmetrisierte Seed-Matrix; Grundlage numerisch stabiler Spektralsignaturen.
$\lambda_k(S_w)$	<i>abgeleitet</i>	Eigenwerte von S_w ; werden zur robusten Quantisierung/Signaturbildung verwendet.
$\varepsilon_{\text{mach}}, \varepsilon_{\text{floor}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{mach}}}$	<i>fixiert</i> (float64)	Maschinenpräzisions-Skalen; definieren robuste Quantisierung und Tie-Schwellen ohne physikalische Zusatzparameter.
$q_w := \varepsilon_{\text{floor}} \max\{1, \ S_w\ _F\}$	<i>abgeleitet</i>	Quantisierungsskala (zellabhängig) für Eigenwert-Rundung; macht Hash-Invarianten robust gegen Rundungsrauschen.
$z_k(w) := \text{round}(\lambda_k/q_w)$	<i>abgeleitet</i>	Integer-Signaturkomponenten; Eingang für deterministischen Hash/Startphase.
$\theta_{0,w} \in [0, 1)$	<i>abgeleitet</i> (SHA256-Hash)	Deterministische Initialphase pro Zelle w (ohne Zufall); wählt bei Bedarf eine Trajektorie eindeutig aus.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$\tau_{\text{Sel}} := \varepsilon_{\text{floor}}$	<i>fixiert</i>	Tie-Schwelle für Auswahlfunktion; wenn Kandidaten zu nahe liegen, wird $\perp$ zurückgegeben (keine künstliche Entscheidung).
$\text{Sel}(\theta, \pi) \in \mathcal{A} \cup \{\perp\}$	<i>fixiert</i> (Regel)	Deterministische Auswahl aus einer diskreten Verteilung π unter Nutzung von θ ; liefert $\perp$ bei numerisch nicht auflösbaren Gleichständen.
$\perp$	<i>fixiert</i>	“No-decision”-Symbol; signalisiert, dass eine Auswahl nicht robust getroffen werden kann (Gate statt stiller Willkür).

A.2 Abschnitt 2: REAL-Graph als prä-OQS

2.1 Numerische Kanonisierung, Determinismus und Solver-Policy

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
A. Maschinenpräzision & deterministische Numerik		
IEEE float64	<i>fixiert</i> (Policy)	Numerische Rechenbasis; alle Regularisierungen/Gates sind auf diese Maschinenpräzision bezogen.
$\varepsilon_{\text{mach}}$	<i>abgeleitet</i> (aus IEEE)	Maschinenepsilon <code>eps(float64)</code> ; Basisskala für toleranzbasierte, deterministische Jitter/Schwellen.
$\varepsilon_{\text{floor}}$	<i>fixiert</i> (Policy)	Numerischer Mindestfloor (in der Definition als Funktion von $\varepsilon_{\text{mach}}$ festgelegt); dient als untere Schranke in Regularisierungen und Spektral-/Konvergenzschwellen.
ε	<i>fixiert</i> (Policy)	In Abschnitt 2 als Default-Regularisierungsstärke verwendet (typisch $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\text{floor}}$).
ε_0	<i>abgeleitet</i>	Baseline-Regularisierung im Mismatch-Kontext (wird u. a. über $r_{\star}^{L_{\text{max}}}$ und $\varepsilon_{\text{floor}}$ fixiert); garantiert Totalität (keine Log-/Entropie-Divergenzen).
B. Level-Konvergenz, Logging und Akzeptanzschwellen (Empirie-Policy)		
L_0	<i>abgeleitet</i> (Empirie-Policy)	Minimaler (ggf. undefinierter) Startindex eines akzeptierten Stabilitätsfensters der Länge k_{stable} für eine konkrete Observable A ; deterministisch als kleinstes L gewählt, das die Schwellen aus Def. 2.3 über das Fenster erfüllt. Falls kein solches Fenster existiert: $L_0(A) := \perp$ (<i>nicht verifiziert</i>).
L_0^{glob}	<i>abgeleitet</i> (Empirie-Policy)	Globaler (ggf. undefinierter) Worst-Case-Startindex eines akzeptierten Stabilitätsfensters, definiert als $L_0^{\text{glob}} := \max_{A \in \mathcal{A}_{\log}} L_0(A)$ falls alle $L_0(A)$ existieren, sonst $L_0^{\text{glob}} := \perp$ (Def. 2.3).

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$A^{(L)}$	<i>abgeleitet</i>	Level- L -Approximation eines Objekts A (Matrix oder Skalar) im Trunk; Basis für Stabilitätsdiagnostik bei $L_{\max} \uparrow \infty$.
$\Delta_L(A)$	<i>abgeleitet</i>	Normierte Stabilitätsabweichung zwischen Leveln; zentrale Metrik für (G1) L -Stabilität im Konvergenzprotokoll.
$\ \cdot\ _F$	<i>fixiert</i>	Frobeniusnorm (Policy für Δ_L bei Matrizen).
$\rho_L := \rho(A^{(L)})$	<i>abgeleitet</i>	Im Protokoll geloggte Spektral-/Radiusgröße der Matrix $A^{(L)}$; Hinweis: In der rev21-Quelle wird $\rho(\cdot)$ verwendet, aber die konkrete Wahl (z. B. Spektralradius) ist in Abschnitt 2 nicht explizit formalisiert.
δ_L^{spec}	<i>abgeleitet</i>	Maximale Eigenwert-Abweichung zwischen Leveln (falls Spektren ausgewertet werden); ergänzt Δ_L um spektrale Stabilität.
$\lambda_i(\cdot)$	<i>abgeleitet</i>	Eigenwerte (in den Spektraldiagnostiken für δ_L^{spec} und im $\log_{\det}$ -Algorithmus).
τ_{rel}	<i>fixiert</i> (Policy)	Relative Konvergenzschwelle (Default proportional zu $\varepsilon_{\text{floor}}$) für <i>PASS</i> in Level-Stabilität.
$\tau_{\text{rel,warn}}$	<i>fixiert</i> (Policy)	Schwächere Konvergenzschwelle für <i>WARN(WEAK_CONVERGENCE)</i> .
τ_{spec}	<i>fixiert</i> (Policy)	Schwelle für spektrale Level-Stabilität via δ_L^{spec} .
k_{stable}	<i>fixiert</i> (Policy)	Anzahl aufeinanderfolgender Level-Schritte, die unterhalb der Schwellen liegen müssen, um Stabilität zu attestieren.
C. Deterministische SPD-Regularisierung & Solve-Semantik		
$\text{sym}(A)$	<i>abgeleitet</i>	Symmetrisierung (in Abschnitt 2 als $\frac{1}{2}(A + A^\top)$); Grundlage der SPD-Regularisierung.
$\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A)$	<i>abgeleitet</i>	Stufenweise SPD-Regularisierungskandidaten (Symmetrisierung + Tikhonov-Jitter) zur deterministischen Implementierbarkeit von Kron/Solve.
β_{reg}	<i>fixiert</i> (Policy)	Regularisierungs-Basis (Eskalationsfaktor) für $\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A)$; steuert deterministische Jitter-Eskalation.
M_{reg}	<i>fixiert</i> (Policy)	Maximale Eskalationsstufe für Reg_{SPD} ; begrenzt Regularisierung und macht die Definition total.
$\delta_0(A)$	<i>fixiert/abgeleitet</i> (Def. 2.8): $\delta_0(A) := \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, \ \text{sym}(A)\ _F\}$	Numerische Basisskala für die Jitter-Amplitude in $\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A) = \text{sym}(A) + \beta_{\text{reg}}^m \delta_0(A)I$; setzt die Größenordnung der Tikhonov-Regularisierung in IEEE float64; <i>kein</i> physikalischer Parameter.
$\text{cholOK}(M)$	<i>abgeleitet</i> (Policy-Prädikat)	Deterministischer Prädikatwert, ob eine Cholesky-Faktorisierung unter der festgelegten float64-Policy gelingt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$m_{\text{chol}}(A)$	<i>abgeleitet</i>	Kleinste Eskalationsstufe, auf der Cholesky für $\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A)$ gelingt (sonst deterministisch = M_{reg}).
$g_{\min}(M), g_{\max}(M)$	<i>abgeleitet</i>	Gershgorin-basierte deterministische Unter-/Oberabschätzung (ohne spektrale Routinen).
$\hat{\lambda}_{\min}(M), \hat{\lambda}_{\max}(M)$	<i>abgeleitet</i>	Deterministische Schranken für Eigenwert-Min/Max (Proxy) als Basis einer Konditionsschätzung.
$\hat{\kappa}(M)$	<i>abgeleitet</i>	Deterministische (pessimistische) Konditionsschätzung $\hat{\lambda}_{\max}/\hat{\lambda}_{\min}$.
$\kappa_{\max}$	<i>fixiert</i> (Policy)	Konditions-Grenze in der Eskalationsregel zur Auswahl von $m(A)$; Überschreitung wird als COND_FAIL geloggt.
$m(A)$	<i>abgeleitet</i>	Kleinste Stufe $\geq m_{\text{chol}}(A)$, auf der $\hat{\kappa}(\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A)) \leq \kappa_{\max}$; sonst $m(A) = M_{\text{reg}}$.
$\delta_{\text{SPD}}(A)$	<i>abgeleitet</i>	Effektive Jitter-Amplitude nach Eskalation (in Abschnitt 2 als $\beta_{\text{reg}}^{m(A)}\delta_0(A)$ definiert).
$\text{Reg}_{\text{SPD}}(A)$	<i>abgeleitet</i>	Finale deterministische SPD-Regularisierung (Kandidatenstufe $m(A)$); numerische Stabilisierung, <i>kein</i> physikalischer Parameter.
$\text{solve}(\cdot, \cdot)$	<i>fixiert</i> (Policy-Funktion)	Deterministische Solve-Operation (via SPD-Regularisierung + Cholesky/Backsolve nach definierter Tie-break- und Failure-Policy).
D. Fallback-/Gate-Raten und Budgets		
$f(n, w)$	<i>abgeleitet</i>	Pro-Zelle Fallback-Flag (Soft-Fallback-Monitoring) gemäß Def. 4.2.
$\mathcal{W}, N_W := \mathcal{W} $	<i>abgeleitet</i>	Endliche Menge der betrachteten Zellen (gemäß Wortordnung) und ihre Kardinalität; Normalisierung für Fallback-Raten.
$p_{\text{fb}}(n)$	<i>abgeleitet</i>	Gesamtrate der Zellen mit Fallback in Schritt n ; dient Run-Invalidierung über $p_{\text{fb}, \max}$.
$p_{\text{fb}, \max}, p_{\text{fb}, \text{hard}, \max}$	<i>fixiert</i> (Policy)	Schwellwerte für Run-Invalidierung bei (Soft-/Hard-)Fallback-Raten.
$p_{\text{fb}, \text{hard}}, p_{\text{fb}, \text{soft}}$	<i>abgeleitet</i>	Forensische Trennung von Hard- vs. Soft-Fallback im Report (normativ).
$p_{\text{cond_fail}}$	<i>abgeleitet</i>	Rate der COND_FAIL -Ereignisse (separates Konditions-Gate/Report-Feld; nicht gleichbedeutend mit valid=0).
κ_{susp}	<i>fixiert</i> (Policy)	Verdachtsgrenze für konditionsgetriebene Hard-Fallbacks (Default 10^{10}) in $p_{\text{fb}, \text{hard}}^{(\kappa)}$.
$p_{\text{fb}, \text{hard}}^{(\kappa)}$	<i>abgeleitet</i>	Bedingte Hard-Fallback-Rate unter der Bedingung $\hat{\kappa} > \kappa_{\text{susp}}$; dient Artefaktkontrolle.
$\mathcal{A}(n), N_A := \mathcal{A}(n) $	<i>abgeleitet</i>	Deterministisch geordnete Menge der in Schritt n regulierten/gelösten Blöcke und ihre Anzahl.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$p_{\text{mreg}}(n)$	<i>abgeleitet</i>	Rate maximaler Eskalation ($m(A) = m_{\text{reg,max}}$) über alle Solve/RegSPD-Blöcke; Gate via $p_{\text{mreg,warn/max}}$.
$p_{\text{mreg,warn}}, p_{\text{mreg,max}}$	<i>fixiert</i> (Policy)	Schwellwerte (WARN/INVALID) für Regularisierungs-Eskalationsraten.
$m_{\text{reg,max}}$	<i>fixiert</i> (Policy)	In Abschnitt 2 gleich M_{reg} gesetzt; Referenz zur Zählung maximaler Eskalation.
λ_n	<i>abgeleitet</i>	Skalarer Constraint-Multiplikator zur (globalen) Randenergie-Erhaltung auf B_0 ; wird per deterministischer Bracketing/Bisektion berechnet, mit Fallback $\lambda_n := 0$.
$N_{\text{expand}}, N_{\text{bisect}}$	<i>fixiert</i> (Policy)	Budgetbestandteile für Bracketing-Expansion und Bisektion bei der λ_n -Bestimmung.
$N_{\lambda,\text{max}}$	<i>abgeleitet</i>	Gesamtbudget $N_{\text{expand}} + N_{\text{bisect}}$; Überschreitung erzeugt WARN(LAMBDA_BUDGET).
E. Deterministische Matrixfunktionen (für CPTP / QRE)		
$\text{expm}_{\text{det}}(A)$	<i>fixiert</i> (Policy)	Deterministische Matrix-Exponentialfunktion (Higham scaling-and-squaring + Padé (13, 13)) für CPTP-Zeitschritte.
$\ \cdot\ _1, \theta_{13}$	<i>fixiert</i> (Policy)	Deterministische Skalierungswahl in expm_{det} über 1-Norm und Higham-Schranke θ_{13} .
$\log_{\text{det}}(\rho)$	<i>fixiert</i> (Policy)	Deterministischer Matrixlogarithmus für Dichtematrizen über kanonisierte Spektralzerlegung mit entartungsstabiler Basiswahl.
$\rho \succeq 0, \text{Tr}(\rho) = 1$	<i>Zustandsannahme</i>	Eingangsbedingungen des $\log_{\text{det}}$ -Algorithmus für Dichtematrizen.
ρ_{H}	<i>abgeleitet</i>	Hermitisierung $\frac{1}{2}(\rho + \rho^\dagger)$ als Ausgangspunkt der Spektralzerlegung.
τ_{deg}	<i>fixiert</i> (Policy)	Entartungs-Schwelle (Default proportional zu $\varepsilon_{\text{floor}}$ und $\ \rho_{\text{H}}\ _2$) zur Clusterbildung nahezu gleicher Eigenwerte.
$C, \mathcal{E}_C, P_C$	<i>abgeleitet</i>	Cluster der Eigenwerte; zugehöriger Eigenraum und orthogonaler Projektor; Grundlage der kanonischen Basiswahl in entarteten Unterräumen.
e_i, w_i	<i>abgeleitet</i>	Standardbasisvektoren und projizierte Kandidaten $w_i := P_C e_i$; deterministische Reihenfolge für modifiziertes Gram–Schmidt.

2.2 Kanonische Parameterreduktion und Skalenweights

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
L_{max}	<i>frei</i> (numerischer Cutoff)	Darstellungslevel des Trunks (endlicher Approximant); bestimmt Problemgröße und Approximation.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
L_{int}	<i>fixiert</i>	Intrinsischer Interaktionsradius/Minimallevel in Pfeiler A: in Abschnitt 2 deterministisch auf 1 gesetzt.
K_{max}	<i>abgeleitet</i>	Maximale Wortlänge/Zelltiefe im Feedback: $K_{\text{max}} := \max\{L_{\text{max}} - 1, 0\}$.
r_{SG}	<i>fixiert (SG)</i>	SG-Energienormierungsparameter (in Abschnitt 1 explizit als $r_{\text{SG}} = 3/5$ genannt); fixiert die Standard-Renormierung.
$r_{\star}$	<i>fixiert (SG) / frei (ST)</i>	Modellparameter der Energienormierung: im SG-Fall deterministisch auf r_{SG} gesetzt; im ST-Fall abhängig von der gewählten harmonischen Struktur.
α_k	<i>abgeleitet</i>	Normierte Skalenweights $\alpha_k := \frac{r_{\star}^k}{\sum_{j=1}^{K_{\text{max}}} r_{\star}^j}$ für $k = 1, \dots, K_{\text{max}}$ (bei $K_{\text{max}} = 0$ leere Summe).
k	Index	Skalen-/Wortlängenindex in α_k ; läuft von 1 bis K_{max} .

2.3 REAL-Zustand (Leitwerte), Laplacian und Dirichlet-Energie

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$n \in \mathbb{N}_0$	Index	Diskreter Zeitschritt/Feedback-Index des REAL-Zustands.
E, V	<i>aus Abschnitt 1</i>	Kanten- bzw. Knotenmengen des endlichen Trunk-Approximanten auf Level L_{max} .
$c_n : E \rightarrow (0, \infty)$	<i>abgeleitet</i> (Zustandsgröße)	Leitwertfunktion (REAL-Zustand) im Schritt n ; einzige dynamische Variable in Pfeiler A (Topologie bleibt fix).
$c_0(e)$	<i>fixiert</i>	Deterministische Initialisierung: in Abschnitt 2 $c_0(e) := 1$ für alle $e \in E$.
$L_n \in \mathbb{R}^{ V \times V }$	<i>abgeleitet</i>	Gewichtete (loop-less) Laplacian aus c_n ; Grundlage von Dirichlet-Form, DtN/Kron und optionaler OQS-Diagnostik.
$(L_n)_{xy}$	<i>abgeleitet</i>	Matrizeinträge der Laplacian (Off-Diagonale = $-c_n(\{x, y\})$ für Kanten; Diagonale als gewichtete Grade).
$f : V \rightarrow \mathbb{R}$	<i>Testfunktion</i>	Reelle Potential-/Feldkonfiguration zur Definition der Energie.
$\mathcal{E}_n(f)$	<i>abgeleitet</i>	Dirichlet-Energie $\mathcal{E}_n(f) := \frac{1}{2} \sum_{\{x, y\} \in E} c_n(\{x, y\}) (f(x) - f(y))^2 = \frac{1}{2} f^\top L_n f$.

2.4 Hilbertraum aus Dirichlet-Form und intrinsischer System/Umwelt-Split

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$f, g : V \rightarrow \mathbb{C}$	<i>Testfunktionen</i>	Komplexwertige Funktionen für die sesquilineare Dirichlet-Form $\mathcal{E}_n$.
$\mathcal{E}_n(f, g)$	<i>abgeleitet</i>	Zeitabhängige Dirichlet-Form (über c_n) als sesquilineare Energieform auf dem gewichteten Graphen.
$\ell^2(V)$	<i>abgeleitet</i>	Knoten-Hilbertraum des Trunks; inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2(V)}$ wird zur Operatoridentifikation genutzt.
$d_p \in \mathbb{N}$	<i>frei mit Default</i>	Interne Dimensionszahl („interne Freiheitsgrade pro Knoten“); Abschnitt 2 nennt Default $d_p = 1$.
$\mathcal{H} := \ell^2(V) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$	<i>abgeleitet</i>	Globaler (prä-geometrischer) Hilbertraum im Trunk.
$B \subseteq V$	<i>aus Abschnitt 1/2</i>	Randmenge (z. B. B_0 oder B_w) als Systemträger im intrinsischen Split.
$\bar{B} := V \setminus B$	<i>abgeleitet</i>	Komplement (intrinsische Umwelt im Trunk).
$\mathcal{H}_B, \mathcal{H}_{\bar{B}}$	<i>abgeleitet</i>	System- und Umwelt-Hilberträume: $\mathcal{H}_B = \ell^2(B) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$, $\mathcal{H}_{\bar{B}} = \ell^2(\bar{B}) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$.
$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_{\bar{B}}$	<i>abgeleitet</i>	Direktsumme (kein ontischer Tensorprodukt-Split); Grundlage der CPTP-Projektions-/Ersetzungs-Kanäle.
$V_w = B_w \sqcup I_w$	<i>aus Abschnitt 1</i>	Zellzerlegung in Rand B_w (System) und Zellinneres I_w (lokale intrinsische Umwelt).

2.5 CPTP-Randkanal und Injektion

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
Π_B	<i>abgeleitet</i>	Orthogonaler Vertex-Projektor auf $\ell^2(V)$: $(\Pi_B f)(x) = \mathbf{1}_{\{x \in B\}} f(x)$.
$P_B := \Pi_B \otimes I_{d_p}$	<i>abgeleitet</i>	Hilbertraum-Projektor auf $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}$.
I_{d_p}	<i>abgeleitet</i>	Identitätsoperator auf den internen Freiheitsgraden $\mathbb{C}^{d_p}$.
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	<i>Standard</i>	Beschränkte Operatoren auf $\mathcal{H}$; Trägerraum für P_B und Zustandsoperatoren.
σ_B	<i>fixiert</i>	Referenzdichtematrix mit Träger in $\mathcal{H}_B$; Default $\sigma_B = \frac{1}{\text{Tr}(P_B)} P_B = \frac{1}{ B d_p} P_B$.
Φ_B	<i>abgeleitet</i>	CPTP-Kanal (Projektions-/Ersetzungs-Coarse-Graining): $\Phi_B(\rho) = P_B \rho P_B + \text{Tr}((I - P_B)\rho) \sigma_B$.
ι_B	<i>abgeleitet</i>	Injektion/Einbettung von Randzuständen ρ_B in die globale Algebra (identifiziert ρ_B als Operator mit Träger in $\mathcal{H}_B$).
$\mathcal{H}_{V_w}$	<i>abgeleitet</i>	Lokaler Zell-Hilbertraum $\ell^2(V_w) \otimes \mathbb{C}^{d_p} \cong \mathcal{H}_{B_w} \oplus \mathcal{H}_{I_w}$.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$\Phi_{B_w}^{(w)}$	<i>abgeleitet</i>	Lokales CPTP-Coarse-Graining auf B_w (analog zu Φ_B) für die Zell-Diagnostik; Default-Ersetzung über σ_{B_w} .

2.6 Optionaler OQS-Zeitschritt und Zustandsdiagnostik (nicht Bestandteil von Driver-B)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$\mathcal{D}(\mathcal{H})$	<i>Standard</i>	Menge der Dichtematrizen (Zustände) auf $\mathcal{H}$.
$\mathcal{T}_n$	<i>abgeleitet</i>	CPTP-Zeitkanal im Schritt n für optionale Simulation/Diagnostik; nicht normativ für Driver-B.
A_n	<i>abgeleitet</i>	Selbstadjungierter, positiv semidefiniter Generator aus der Dirichlet-Form (formal: Laplacian-Generator aus c_n).
κ_n	<i>frei mit Default</i>	Dimensionsloser Skalenfaktor für den Diagnose-Hamiltonian; Default $\kappa_n := 1$.
$H_n := \kappa_n(A_n \otimes I_{d_p})$	<i>abgeleitet</i>	Diagnose-Hamiltonian für eine unitäre Probe-Dynamik auf $\mathcal{H}$.
Δt	<i>frei (Diagnose)</i>	Diskreter Zeitschritt der optionalen Zustandspropagation (nicht als physikalische Zeit kalibriert in Pfeiler A).
$U_n := \exp(-i\Delta t H_n)$	<i>abgeleitet</i>	Unitärer Update-Operator der Diagnose-Dynamik.
$H_{n,B_0} := \kappa_n^{(\Lambda)}(\Lambda_n \otimes I_{d_p})$	<i>abgeleitet</i>	Alternative Rand-getragene Probe: Generator über DtN-Operator auf B_0 .
$\kappa_n^{(\Lambda)}$	<i>frei mit Default</i>	Skalenfaktor der Rand-Probe; Default $\kappa_n^{(\Lambda)} := 1$.
$J_{x \rightarrow y}^{(n)}$	<i>abgeleitet</i>	Sprungoperatoren (Quantum-Stochastic-Walk) aus Leitwerten: $J_{x \rightarrow y}^{(n)} = \sqrt{c_n(\{x, y\})}(x\rangle\langle y \otimes I_{d_p})$.
$\mathcal{L}_n$	<i>abgeleitet</i>	GKSL-Generator aus $\{J_{x \rightarrow y}^{(n)}\}$; definiert optionale dissipative Probe $\mathcal{T}_n = \exp(\Delta t \mathcal{L}_n)$.
$\Psi_{n,B} := \Phi_B \circ \mathcal{T}_n \circ \iota_B$	<i>abgeleitet</i>	Induzierter Randkanal (intrinsisches Ausspuren der Umwelt) für Randzustandsläufe.
$\rho_0^{(B)}, \rho_{n+1}^{(B)}$	<i>abgeleitet</i>	Kanonischer Randzustandslauf: $\rho_0^{(B)} := \sigma_B, \rho_{n+1}^{(B)} := \Psi_{n,B}(\rho_n^{(B)})$.

2.7 Globales DtN/Kron auf B_0 und Randenergie-Größen

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
Λ_{n,B_0}	<i>ontisch</i>	DtN-Operator des unendlichen Graphen (ontischer Grenzwert; in endlicher Rechnung nur approximiert).
Λ_n	<i>Trunk-Approximation</i>	In Abschnitt 2 als Kurzschreibweise für die deterministische Trunk-Approximation $\Lambda_{n,B_0}^{(L_{\max})}$ verwendet.
$V = B_0 \sqcup I$	<i>abgeleitet</i>	Zerlegung in Rand B_0 und Inneres $I := V \setminus B_0$ zur Blockstruktur von L_n .
$(L_n)_{BB}, (L_n)_{BI}, (L_n)_{IB}, (L_n)_{II}$	<i>abgeleitet</i>	Blockzerlegung der Laplacian (Patch-1-Subset-Ordnung) als Grundlage der Kron-Reduktion.
$(L_n)_{II,\text{reg}}$	<i>abgeleitet</i>	Deterministisch regularisierter Innerblock via $\text{Reg}_{\text{SPD}}((L_n)_{II})$; garantiert Solve-Totalität.
$X_{I \leftarrow B}^{\text{glob}}$	<i>abgeleitet</i>	Solve-Resultat des Innerblocks (Schur-Komplement-Baustein) in der globalen Kron-Reduktion.
E_{∂}	<i>abgeleitet</i>	Rand-inzidente Kantenmenge: $\{\{u, v\} \in E : u \in B_0 \text{ oder } v \in B_0\}$ (kein Freeze; alle Kanten werden mitgetrieben).
$S_{\bullet}, q := S_{\bullet} $	<i>aus Abschnitt 1</i>	Alphabet und Randgröße; in Abschnitt 2 für symmetrische Randtests (ungeordnete Paare) genutzt.
$(b_0, \dots, b_{q-1})$	<i>abgeleitet</i>	Patch-1-Randordnung (deterministisch) zur Indexierung symmetrischer Randtests.
$y^{(ij)}$	<i>abgeleitet</i>	Randtest-Vektoren für Paare $0 \leq i < j \leq q - 1$ (symmetrische Definition ohne Ankerindex).
$\mathcal{E}_{B_0,n}^{(ij)}$	<i>abgeleitet</i>	Randenergie-Beiträge zu Paar-Tests (i, j) (im Abschnitt 2 aus Λ_n definiert).
$\mathcal{E}_{B_0,n}(b_i)$	<i>abgeleitet</i>	Randenergie pro Randknoten b_i (aus den Paarbeiträgen zusammengesetzt).
$\mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}}$	<i>abgeleitet</i>	Erhaltene Randenergie-Summe (globaler Constraint via λ_n): Summenform über Randknoten bzw. Paare.

2.8 Engineering-/Report-Metriken (nicht-normativ, aber verpflichtend zu loggen)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$ V_L , E_L $	<i>abgeleitet</i>	Problemgrößen (Knoten-/Kantenanzahl) des Level- L -Approximanten; für Skalierbarkeitsabschätzung.
$\text{nnz}(L_n)$	<i>abgeleitet</i>	Anzahl der Nichtnull-Einträge der Laplacian (Sparsity-Metrik).

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
$\text{nnz}(\Lambda_{n,B})$	<i>abgeleitet</i>	Sparsity-Metrik des DtN-Operators/Blocks (falls als Matrix materialisiert).
$t_{\text{build}}, t_{\text{solve}}$	<i>abgeleitet</i>	Laufzeit-Metriken für Laplacian-Bau und Solve-Operationen (Engineering-Transparenz).
mem_{max}	<i>abgeleitet</i>	Peak-Speicherverbrauch im Run; Pflichtfeld im Report zur Skalierbarkeitsdiagnose.

A.3 Abschnitt 3: Widerstandsmetrik

3.1 Effektiver Widerstand (Konzept, nicht-normativ)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
A. Konzeptformeln (nicht normativ; keine Implementationsbasis)		
$L_n^\dagger$	<i>konzeptuell</i> (Pseudoinverse der Laplacian; explizit als nicht-normativ markiert)	Nur Einordnung: formale Darstellung des effektiven Widerstands auf verbundenen Graphen; darf in Suite/Implementierung nicht als Rechenweg benutzt werden.
e_x	<i>abgeleitet</i> (Standardbasis in der Patch-1-Subset-Ordnung auf V)	Einheitsvektor zu Knoten x ; in der Konzeptformel und in der normativen Solve-Formulierung (nach Grounding/Projektion) verwendet.
$R_n(u, v)$	<i>konzeptuell</i> via $(e_u - e_v)^\top L_n^\dagger (e_u - e_v)$	Effektiver Widerstand als formale Größe; normativ ersetzt durch deterministisches Grounding + Solve (siehe 3.2).
$d_n(u, v)$	<i>konzeptuell</i> via $\sqrt{R_n(u, v)}$	Abstandsgröße; normativ durch Solve-basierte Definition und Konnektivitätsregel fixiert (siehe 3.2).

3.2 Normative Definition (implementierbar): Konnektivität + Grounding + Solve

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
A. Basis- und Indexbindung		
V, E	<i>abgeleitet</i> (Trunk bei L_{max} , Abschnitt 1)	Vertex- und Kantenmenge des endlichen Rechenobjekts; Träger von c_n , L_n , R_n , d_n .
$\text{id}(x)$	<i>fixiert</i> (Patch-1-Ordnung; Abschnitt 1)	Deterministische ID zur kanonischen Wahl des Ground-Knotens und zur reproduzierbaren Probenpolitik.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
e_x	<i>abgeleitet</i> (Standardbasis in Patch-1-Subset-Ordnung)	Einheitsvektor; erzeugt $b = \pi_g(e_u - e_v)$ in der Solve-Formulierung.
B. Konnektivitätsregel (Vorrang vor Regularisierung)		
$c_n(a, b)$	<i>Zustand</i> (Leitwertfeld; Abschnitt 2)	Kantenleitwerte; $c_n > 0$ definiert physisch/kombinatorisch zugängliche Kanten im n -Zustand.
E_n^+	<i>abgeleitet</i> aus c_n	Positiv-Kanten-Teilgraph: $E_n^+ := \{(a, b) \in E : c_n(a, b) > 0\}$.
$CC_n(x)$	<i>abgeleitet</i> aus (V, E_n^+)	Zusammenhangskomponente; normativer Sentinel: für getrennte Komponenten gilt $R_n = \infty, d_n = \infty$.
$R_n(u, v), d_n(u, v)$	<i>fixiert</i> (normative Regel)	Disconnected-Sentinel: Falls $CC_n(u) \neq CC_n(v)$, dann $R_n(u, v) = d_n(u, v) = +\infty$ (kein "künstliches Verbinden").
C. Deterministisches Grounding & reduzierte Laplacian		
g	<i>abgeleitet</i> (deterministisch: $\arg \min_{x \in V} \text{id}(x)$)	Ground-Knoten zur Fixierung der Nullmode; macht das Solve-Problem wohldefiniert.
π_g	<i>abgeleitet</i> (Projektion: entfernt g -Komponente)	Abbildung $\mathbb{R}^{ V } \rightarrow \mathbb{R}^{ V -1}$; erzeugt reduzierte Vektoren für das Solve.
$L_n^{(g)}$	<i>abgeleitet</i> aus L_n	Reduzierte Laplacian (Zeile/Spalte g entfernt) in Patch-1-Subset-Ordnung.
$S_n^{(g)}$	<i>abgeleitet</i> (Symmetrisierung)	$S_n^{(g)} := \frac{1}{2}(L_n^{(g)} + (L_n^{(g)})^\top)$; numerische Robustheit.
δ_R	<i>abgeleitet</i> / <i>fixiert</i> (float64-Policy)	Deterministischer Tikhonov-Jitter für Widerstands-Solve: $\delta_R := \varepsilon_{\text{floor}} \max\{1, \ S_n^{(g)}\ _F\}$; ausdrücklich <i>kein</i> physikalischer Parameter.
I	<i>fixiert</i>	Identitätsmatrix in passender Dimension; bildet $(S_n^{(g)} + \delta_R I)$.
D. Solve-Problem und Enddefinition		
b	<i>abgeleitet</i>	Right-hand-side: $b := \pi_g(e_u - e_v)$.
x	<i>abgeleitet</i> (Solve)	Lösung von $(S_n^{(g)} + \delta_R I)x = b$ unter der Solver-Policy aus Abschnitt 2; bei Solve-Fail wird $R_n = d_n = \infty$ gesetzt.
$R_n(u, v)$	<i>abgeleitet</i> (aus b, x)	$R_n(u, v) := \max\{0, b^\top x\}$; das max ist deterministische Schutzklausel gegen numerisch negative Artefakte.
$d_n(u, v)$	<i>abgeleitet</i>	Abstand: $d_n(u, v) := \sqrt{R_n(u, v)}$ für endliche R_n .

3.3 Visualisierungs-Gauges (nicht-normativ)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
A. Allgemeines (rein visuell; nicht Teil der normativen Abschnitte 1–3)		
$X_n : V \rightarrow \mathbb{R}^d$	<i>optional / nicht-normativ</i>	Einbettungskordinaten zur Visualisierung von IDEAL/REAL; dürfen nicht als physikalische Geometrie interpretiert werden.
d	<i>frei / Visualisierung</i>	Plot-Dimension (typisch $d = 2$ oder 3); keine physikalische Bedeutung.
$D = (d_n(u, v))$	<i>abgeleitet aus d_n</i>	Distanzmatrix als Input für MDS-Varianten; oft auf größte endliche Zusammenhangskomponente eingeschränkt.
B. Gauge A/B: MDS-Varianten		
<code>viz_gauge</code>	<i>Report-Feld (nicht-normativ)</i>	Metadaten zur verwendeten Visualisierungs-Policy (klassische MDS vs. Stress-MDS, Initialisierung/Stopkriterium etc.).
C. Gauge C: harmonische Einbettung (Dirichlet-Randwertproblem)		
$Y_B : B_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$	<i>frei / Visualisierung</i>	Fixierte Randkoordinaten (SG: äquilateral, ST: tetraedrisch); reine Darstellungswahl.
$B = B_0, I = V \setminus B$	<i>abgeleitet</i>	Rand/Innen-Zerlegung für harmonische Fortsetzung.
$y_B^{(j)}, y_I^{(j)}$	<i>abgeleitet (Solve)</i>	Randwerte und harmonische Fortsetzung für Koordinatenkomponente j : $(L_n)_{II, \text{reg}} y_I^{(j)} = -(L_n)_{IB} y_B^{(j)}$.
X_{ref}	<i>optional / nicht-normativ</i>	Referenzlayout für Zeitreihenvergleich (z. B. IDEAL-Layout oder $n = 0$).
Procrustes (rigid)	<i>optional / nicht-normativ</i>	Rigider Abgleich (Translation/Rotation; optional Skalierung) ausschließlich zur visuellen Vergleichbarkeit über n .
$a_{\text{vis}} > 0$	<i>frei / nicht-normativ</i>	Reiner Anzeige-Verstärkungsfaktor (z. B. Verstärkung relativer Abweichungen); explizit als nicht-physikalisch zu markieren.

3.4 Akzeptanzkriterien & Diagnostik (normativ: Report-Felder; Gates)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
A. Deterministische Stichprobenpolitik		
V_n	<i>abgeleitet (Patch-1-Vertexmenge im Zustand n)</i>	Träger der Stichproben für Audit-Checks; mit deterministischer ID-Abbildung id.
<code>policy_hash</code>	<i>fixiert / Report-Feld</i>	Hash der normativen Policy (Solver, RegSPD, Matrixfunktionen etc.); Bestandteil des Audit-Seeds.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
<code>graph_hash</code>	<i>abgeleitet / Report-Feld</i>	Hash der Graph-Repräsentation des Zustands (V_n, E_n^+, c_n) ; Grundlage reproduzierbarer Probenziehungen.
s_R	<i>abgeleitet / fixiert</i>	Deterministischer Audit-Seed: $s_R := \text{u32}(\text{SHA256}(\text{policy_hash} \parallel \text{graph_hash} \parallel \text{R_AUDIT}))$.
$\mathcal{P}_R$	<i>abgeleitet</i>	Menge auditierten Knotenpaare (ohne Zurücklegen) aus s_R ; Defaultgröße $\min\{5000, \binom{ V_n }{2}\}$.
$\mathcal{T}_R$	<i>abgeleitet</i>	Menge auditierten Tripel; Defaultgröße $\min\{10000, V_n ^3\}$.
B. Skalenadaptierte Toleranzen (numerisch; keine Physik)		
$R_{\max}, d_{\max}$	<i>abgeleitet</i>	Maxima über endliche Stichprobenwerte; Konvention = 1 falls keine endlichen Stichproben vorliegen.
τ_R	<i>fixiert</i> (float64-Umfeld)	Toleranz für Widerstands-Checks: $\tau_R := 10^{-8} \max\{1, R_{\max}\}$.
τ_d	<i>fixiert</i> (float64-Umfeld)	Toleranz für Distanz-Checks: $\tau_d := 10^{-8} \max\{1, d_{\max}\}$.
τ_{res}	<i>fixiert</i> (float64-Umfeld)	Residualschwelle: $\tau_{\text{res}} := 10^{-10}$ für Solve-Integritätscheck.
C. Normative Report-Felder (mindestens)		
<code>res.nV</code>	<i>Report-Feld</i>	Anzahl Vertices $ V_n $ der auditierenden Patch-1-Menge.
<code>res.nCC</code>	<i>Report-Feld</i>	Anzahl Zusammenhangskomponenten in (V_n, E_n^+) .
<code>res.seed</code>	<i>Report-Feld</i>	Gespeicherter Audit-Seed s_R (Reproduzierbarkeit).
<code>res.nPairs, res.nTris</code>	<i>Report-Felder</i>	Größen der Stichprobenmengen $ \mathcal{P}_R , \mathcal{T}_R $.
<code>res.Rmax, res.dmax</code>	<i>Report-Felder</i>	Skalenwerte $R_{\max}$ und $d_{\max}$, aus denen τ_R, τ_d abgeleitet werden.
D. Harte Compliance-Checks (Gate: PASS/FAIL; ohne neue Physik)		
<code>res.disc_pairs</code>	<i>Report-Feld</i>	Zähler der Stichprobenpaare mit $\text{CC}_n(u) \neq \text{CC}_n(v)$ (Disconnected-Sentinel-Fälle).
<code>res.disc_inf_ok_frac</code>	<i>Report-Feld</i>	Anteil der disconnected-Paare, für die tatsächlich $R_n(u, v) = d_n(u, v) = \infty$ ausgegeben wird (muss = 1 sein).
<code>res.Rmin</code>	<i>Report-Feld</i>	Minimum über endliche Widerstände; Check T3.R2 verlangt $R_{\min} \geq -\tau_R$.
<code>res.diag_abs_max</code>	<i>Report-Feld</i>	Maximaler Betrag $ R_n(u, u) $ über Stichprobenknoten; Check T3.R3 verlangt $\leq \tau_R$.
<code>res.sym_abs_max</code>	<i>Report-Feld</i>	Maximale Asymmetrie $ R_n(u, v) - R_n(v, u) $ über endliche Stichprobenpaare; Check T3.R4.
r	<i>abgeleitet</i>	Solve-Residualnorm: $r := \ (S_n^{(g)} + \delta_R I)x - b\ _2 / \max\{1, \ b\ _2\}$.
<code>res.resid_rel_max</code>	<i>Report-Feld</i>	Maximaler relativer Residualwert r über endliche Stichprobenpaare; Check T3.R5 verlangt $\leq \tau_{\text{res}}$.
E. Soft-Diagnostik (nicht blockierend; aber zwingend zu reporten/zu SKIPen)		

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Bedeutung
Δ_{uvw}	<i>abgeleitet</i>	Dreiecksverletzung: $\Delta_{uvw} := \max\{0, d_n(u, w) - d_n(u, v) - d_n(v, w)\}$ auf Tripeln in gleicher Komponente.
<code>res.tri_viol_max</code> , <code>res.tri_viol_frac</code>	<i>Report-Felder</i>	Maximale Dreiecksverletzung und Anteil mit $\Delta_{uvw} > \tau_d$ (Audit der metrischen Konsistenz in Float64).
g'	<i>optional</i>	Alternativer deterministischer Ground-Knoten (z. B. zweitkleinste ID) für Robustheitsdiagnostik; Default: Profil deaktiviert.
Δ_R^{ground}	<i>optional / abgeleitet</i>	Relative Abweichung zwischen Ground-Wahlen: $\max R^{(g)} - R^{(g')} / \max\{1, R^{(g)}\}$ über Stichproben.
<code>res.ground_delta_rel_max</code>	<i>Report-Feld (optional)</i>	Maximale Ground-Robustheitsabweichung; Default: SKIP falls Profil deaktiviert.
Gate-States	<i>fixiert</i>	PASS/FAIL/SKIP; ein FAIL in T3.R1–T3.R5 ist <i>Definition-Compliance-Fail</i> .

A.4 Abschnitt 4: Driver-B (OQS-Feedback, Mismatch, Rückkopplung, Update)

4.1 Adressmengen, LCP und äquivalente Zellzuordnung (Maß)

68

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$\text{Rep}(x)$	Patch 1 (Repräsentanten); abgeleitet aus der Zellstruktur / Identifikationen	Menge aller Repräsentanten eines Knotens x als Paare (w, i) ; liefert die Adressinformation für die Driver-B-Zellzuordnung.
A_x	Definiert aus $\text{Rep}(x)$	Adressmenge eines Knotens: $A_x := \{w : \exists i (w, i) \in \text{Rep}(x)\} \subseteq S_{\bullet}^{L_{\max}}$.
$\text{lcp}(u, v)$	Definiert für $u, v \in S_{\bullet}^{L_{\max}}$	Längster gemeinsamer Präfix (Longest Common Prefix); bestimmt die Zell-Tiefe, auf der zwei Adressen “zusammenfallen”.
$e = \{x, y\} \in E$	IDEAL/REAL-Trunk (Graphstruktur)	Ungewichtete Kante; Driver-B ordnet Kanten über die Adressen ihrer Endpunkte Zell(en) zu.
$P(e)$	Definiert aus Adressen A_x, A_y	Menge der LCP-Kandidaten: $P(e) := \{\text{lcp}(u, v) : u \in A_x, v \in A_y\}$.
$\ell_{\max}(e)$	Definiert aus $P(e)$	Maximale LCP-Tiefe der Kante: $\ell_{\max}(e) := \max_{p \in P(e)} p $ (mit Konvention $\ell_{\max}(e) = 0$ falls $P(e) = \{\emptyset\}$).
$P^*(e)$	Definiert aus $P(e), \ell_{\max}(e)$	Menge der maximalen Präfixe (Tie-Handling): $P^*(e) := \{p \in P(e) : p = \ell_{\max}(e)\}$.
$\text{pref}_k(p)$	Notation / Hilfsoperator	Präfixoperator: Präfix der Länge k (nur definiert für $ p \geq k$).
$\mu_{k,w}(e)$	Normativ definiertes, deterministisches Maß (kein lex. Symmetriebruch)	Äquivanter Zellzuordnungsgewichtsanteil der Kante e zu Zelle $w \in S_{\bullet}^k$: $\mu_{k,w}(e) = \frac{ \{p \in P^*(e) : \text{pref}_k(p) = w\} }{ P^*(e) }$ falls $\ell_{\max}(e) \geq k$, sonst 0.
$W_k(e)$	Definiert aus $\mu_{k,w}(e)$	Endliche Supportmenge der Maßzuordnung: $W_k(e) := \{w \in S_{\bullet}^k : \mu_{k,w}(e) > 0\}$.

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$w_k^{\text{rep}}(e)$	Nur Report/Visualisierung (nicht normativ)	Lexikographischer Repräsentant der Supportmenge: $w_k^{\text{rep}}(e) := \min_{<_{\text{lex}}} W_k(e)$ (oder $\perp$ bei leerer Supportmenge).
$E_w^{(k)}$	Definiert aus $\mu_{k,w}(e)$	Adressierte Zellkantenmenge: $E_w^{(k)} := \{e \in E : \mu_{k,w}(e) > 0\}$.
$S_\bullet^0 = \{\emptyset\}$	Konvention	SkalennullAdresse; ermöglicht einheitliche Notation für den Randfall $w = \emptyset$.
$E_\emptyset$	Definiert aus $\ell_{\max}(e)$	Corner–Corner-Kantenmenge: $E_\emptyset := \{e \in E : \ell_{\max}(e) = 0\}$.
$\mu_{0,\emptyset}(e)$	Konvention / Vereinheitlichung	Indikator für $E_\emptyset$: $\mu_{0,\emptyset}(e) := \mathbf{1}_{\{e \in E_\emptyset\}}$.

4.2 Zellränder, lokale Vertexmengen und Innenmengen

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$w \in S_\bullet^k$	Adresse (Skale k)	Indexiert Zellen im Approximanten; Driver-B arbeitet parallel über alle Skalen $k = 1, \dots, K_{\max}$ (sowie den Randfall $\emptyset$).
$B_w, b_{w,i}$	Bereits in Abschnitt 1 definiert (Patch 1 Ordnung)	Zellrand und geordnete Randknoten; definieren den Randhilbertraum und die DtN-Operatoren pro Zelle.
V_w	Definiert aus $E_w^{(k)}$ und B_w	Lokale Vertexmenge der Zelle: $V_w := (\bigcup_{e=\{u,v\} \in E_w^{(k)}} \{u,v\}) \cup B_w$ (Patch: $B_w \subseteq V_w$ stets).
I_w	Definiert aus V_w, B_w	Innenmenge: $I_w := V_w \setminus B_w$; wird im lokalen DtN per Schur-Komplement (Solve-Semantik) eliminiert.
$q := B_w $	Abgeleitete Größe	Zellrandgröße; bestimmt die Anzahl der Randproben (Paare) und die Dimension des Vertex-Randhilbertraums.
d_{vert}	Definiert in der Mismatch-Subsection	$d_{\text{vert}} := B_w $; Vertex-Freiheitsgradzahl im Randhilbertraum.

4.3 Äquivarianz- und Tie-Diagnostik (nur Reporting)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
tie_rate_k	Diagnostische Größe (T4.DQ1)	Häufigkeit maximaler LCP-Ties auf Skale k : $\text{tie_rate}_k := \frac{ \{e \in E : P^*(e) > 1, \ell_{\max}(e) \geq k\} }{ \{e \in E : \ell_{\max}(e) \geq k\} }$.
m_k	Diagnostische Größe (T4.DQ1)	Maximale Tie-Multiplizität auf Skale k : $m_k := \max_{e: \ell_{\max}(e) \geq k} P^*(e) $.

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$Z_w^{(k)}$	Diagnostische Größe (T4.DQ2) und normativ in Abschnitt 4.10	Zellmasse der Maßzuordnung: $Z_w^{(k)} := \sum_{e \in E} \mu_{k,w}(e)$; dient als Degeneranz-/Balance-Check und als Basis für $\bar{p}_w$.
SKIP	Gate-State (Reporting)	Zulässiger Diagnostik-Status z. B. bei leerem Nenner in tie_rate_k ; keine Dynamikwirkung.

4.4 Lokaler loopy-Laplacian

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$c_n(e)$	Dynamischer Leitwert (Pfeiler A)	Mikroskopischer Zustand (Edge-Leitwerte) im Schritt n ; einziger dynamischer Freiheitsgrad in Driver-B.
$L_n := L(c_n)$	Abgeleitet aus c_n	Gewichtete Laplacian; Input für alle DtN/Kron-Reduktionen und damit für Mismatch, p und Update.
$Q_{n,w}$	Definiert als Hauptuntermatrix	Lokaler loopy-Laplacian: $Q_{n,w} := (L_n)_{V_w, V_w}$; Diagonale enthält auch Kopplungen nach außen als Shunts.
$(Q_{n,w})_{BB}, (Q_{n,w})_{BI}, (Q_{n,w})_{IB}, (Q_{n,w})_{II}$	Blockzerlegung nach $V_w = B_w \sqcup I_w$	Bausteine für lokales DtN via Schur-Komplement; II -Block wird deterministisch regularisiert.

4.5 Lokales DtN/Kron auf B_w (deterministisch; total definiert)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$\Lambda_{n,w}$	Lokales DtN (normativ)	Zell-Randantwort auf B_w nach Eliminierung von I_w (und in der ontischen Interpretation zusätzlich tieferen Leveln).
$(Q_{n,w})_{II, \text{reg}}$	Numerische Stabilisierung	Deterministisch regularisierter Innenblock: $(Q_{n,w})_{II, \text{reg}} := \text{Reg}_{\text{SPD}}((Q_{n,w})_{II})$.
$\text{Reg}_{\text{SPD}}(\cdot), \delta_{\text{SPD}}(\cdot)$	Aus Abschnitt 2 (SPD-Regularisierung)	Tikhonov-Jitter in IEEE float64; rein numerisch, kein physikalischer Parameter.
$\text{cholOK}(\cdot)$	Deterministisches Prädikat (Policy-gebunden)	Erfolg der Cholesky-Faktorisierung unter der fixierten Solve-Policy; bestimmt $\text{valid}(n, w)$.
$\text{valid}(n, w) \in \{0, 1\}$	Gate/Report-Feld	Lokales DtN-Validitätsflag: $\text{valid}(n, w) := \text{cholOK}((Q_{n,w})_{II, \text{reg}})$ (für $I_w \neq \emptyset$); bei $I_w = \emptyset$ per Konvention 1.
$\text{solve}(A, B)$	Aus Abschnitt 2 (Solve-Semantik)	Deterministische lineare Lösung; hier typischerweise $X_{I \leftarrow B}^{\text{loc}}$ mit $A = (Q_{n,w})_{II, \text{reg}}$ und $B = (Q_{n,w})_{IB}$.

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$X_{I \leftarrow B}^{\text{loc}}(n, w)$	Abgeleitet über solve	Hilfsmatrix für das Schur-Komplement (lokales DtN).
$\Lambda_{n,w}$ (Valid-Fall)	Schur-Komplement	Bei $\text{valid}(n, w) = 1$: $\Lambda_{n,w} := (Q_{n,w})_{BB} - (Q_{n,w})_{BI} X_{I \leftarrow B}^{\text{loc}}(n, w)$.
$\Lambda_{n,w}$ (Invalid-Fall)	Totalitäts-Definition	Bei $\text{valid}(n, w) = 0$ deterministisch ohne Inversion: $\Lambda_{n,w} := (Q_{n,w})_{BB} + \delta_0((Q_{n,w})_{BB}) I$.

4.6 Globale Einbettung: globales DtN/Kron auf B_w

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$\bar{B}_w := V \setminus B_w$	Notation	Komplement zu B_w im (endlichen) Approximanten; wird im globalen DtN eliminiert.
$(L_n)_{\bar{B}\bar{B}, \text{reg}}$	Numerische Stabilisierung	Deterministisch regularisierter Umweltblock: $(L_n)_{\bar{B}\bar{B}, \text{reg}} := \text{Reg}_{\text{SPD}}((L_n)_{\bar{B}\bar{B}})$.
$\text{valid}_{\text{glob}}(n, w) \in \{0, 1\}$	Gate/Report-Feld	Globales Validitätsflag: $\text{valid}_{\text{glob}}(n, w) := \text{cholOK}((L_n)_{\bar{B}\bar{B}, \text{reg}})$ (bei $\bar{B}_w \neq \emptyset$; sonst 1).
$\Lambda_{n,w}^{\text{glob}}$	Globales DtN (normativ)	Randantwort auf B_w bei Eliminierung der gesamten (intrinsischen) Umwelt $\bar{B}_w$.
$\Lambda_{n,w}^{\text{glob}}$ (Valid-Fall)	Schur-Komplement	Bei $\bar{B}_w \neq \emptyset$ und $\text{valid}_{\text{glob}}(n, w) = 1$: $\Lambda_{n,w}^{\text{glob}} := (L_n)_{BB} - (L_n)_{B\bar{B}} \text{solve}((L_n)_{\bar{B}\bar{B}, \text{reg}}, (L_n)_{\bar{B}\bar{B}})$.

4.7 Normierung und Kanal-Konstruktion (DtN $\rightarrow$ GKSL $\rightarrow$ CPTP)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$\text{tr}_{\perp}(\Lambda)$	Definiert in Abschnitt 3	Orthogonale Spur (auf dem zu 1 orthogonalen Unterraum); wird zur normierten Skalierung von DtN genutzt.
$\hat{\Lambda}_{n,w}^x$	Normativ (Mismatch-Subsection)	Normierte DtN-Matrix: $\hat{\Lambda}_{n,w}^x := \Lambda_{n,w}^x / \max\{\text{tr}_{\perp}(\Lambda_{n,w}^x), \varepsilon_{\text{floor}}\}$, $x \in \{\text{loc}, \text{glob}\}$.
d_p	Preset/Policy (Pfeiler A)	Lokale “Spur-Dimension” (internal degree); nur als Tensorfaktor im Randhilbertraum und bei Choi-Normierung relevant.
$\mathcal{H}_{B_w}^{\text{vert}} \cong \mathbb{C}^{d_{\text{vert}}}$	Abgeleitet	Vertex-Randhilbertraum $\ell^2(B_w)$ in Patch-1-Ordnung.
$\mathcal{H}_{B_w} := \mathcal{H}_{B_w}^{\text{vert}} \otimes \mathbb{C}^{d_p}$	Abgeleitet / normativ	Voller Randhilbertraum; Basis $ i\rangle \otimes \alpha\rangle$ mit $i \in B_w$, $\alpha \in [d_p]$.
$r_{ij}^x(n, w)$	Abgeleitet aus $\hat{\Lambda}_{n,w}^x$	Deterministische Übergangsraten (für $i \neq j$) auf dem Rand; definieren Lindblad-Operatoren und GKSL-Generator.
$\mathcal{L}_{n,w}^x$	Aus GKSL-Konstruktion	GKSL-Generator (Liouvillian) auf $\mathcal{H}_{B_w}^{\text{vert}}$ aus den Raten r_{ij}^x .

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$\phi_{n,w}^x$	Kanal aus $\mathcal{L}$	Eindeutiger CPTP-Kanal (z. B. via Exponentialmap) auf $\mathcal{H}_{B_w}^{\text{vert}}$, der den Vergleich global vs. lokal ermöglicht.
$\Phi_{n,w}^x = \phi_{n,w}^x \otimes \text{id}_{d_p}$	Normativ	Erweiterter Kanal auf $\mathcal{H}_{B_w}$; stellt Additivität/Trennung der d_p -Freiheitsgrade sicher (inhaltlich unabhängig).

4.8 Mismatch (einzig zugelassene Divergenz)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$d := \dim(\mathcal{H}_{B_w}) = B_w d_p$	Abgeleitet	Hilbertraumdimension; bestimmt Choi-Größen ($d^2 \times d^2$) und die Normierung via $\log(d^2)$.
$ \Omega\rangle$	Normativ	Maximal verschränkter Zustand: $ \Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{a=1}^d a\rangle \otimes a\rangle$ in kanonischer Basis.
$J(\Phi)$	Choi-Zustand (normativ)	Normalisierter Choi-Zustand: $J(\Phi) := (\Phi \otimes \text{id})(\Omega\rangle\langle\Omega)$.
$J_\varepsilon(\Phi)$	Totalitäts-Regularisierung	$J_\varepsilon(\Phi) := (1 - \varepsilon_0)J(\Phi) + \varepsilon_0 I_{d^2}/d^2$ (macht strikt positiv definit).
ε_0	Deterministisch fixiert	$\varepsilon_0 := \max\{r_\star^{L_{\max}}, \varepsilon_{\text{floor}}\}$; numerische Totalitätsregel, keine freie Modellgröße.
$S(\rho\ \sigma)$	Normativ (Umegaki)	Quantum relative Entropie (Umegaki): $S(\rho\ \sigma) = \text{Tr}(\rho(\log_{\det}\rho - \log_{\det}\sigma))$ bei Support-Inklusion, sonst $+\infty$.
$\log_{\det}(\cdot), \text{expm}_{\det}(\cdot)$	Deterministische Matrixfunktionen (Policy)	Log/Exp für PSD/PD Matrizen unter stabilisierter Numerik; Grundlage für $S(\cdot\ \cdot)$.
Mismatch(n, w), Mismatch $_n(w)$	Skalares Mismatch (normativ)	Einzig zugelassene Divergenz: $\text{Mismatch}(n, w) := \frac{S(J_\varepsilon(\Phi_{n,w}^{\text{glob}})\ J_\varepsilon(\Phi_{n,w}^{\text{loc}}))}{\log(d^2)} \geq 0$.
$\Delta r_{ij}(n, w)$	Abgeleitet (Raten-Differenz)	Orientierte Ratendifferenz: $\Delta r_{ij}(n, w) := r_{ij}^{\text{glob}}(n, w) - r_{ij}^{\text{loc}}(n, w) $; Input für Randproben-Gewichte.
$\Delta r_{\{i,j\}}(n, w)$	Symmetrisierung	Ungeordnete Paarversion (für $i < j$) zur symmetrischen Probengewichtung.

4.9 Sättigung κ und Soft-Fallback

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
σ	Normative Policy (Def. 4.1)	Zulässige Sättigungsfunktion $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ (ungerade, monoton, 1-Lipschitz, saturierend); Default tanh.
$\kappa_n^{\text{raw}}(w)$	Definiert aus Mismatch	Rohfaktor: $\kappa_n^{\text{raw}}(w) := \sigma(\text{Mismatch}_n(w))$.

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$\text{valid}(n, w), \text{valid}_{\text{glob}}(n, w)$	Gate-Felder	Validität lokaler/globaler DtN-Schritte; steuern das Fallback-Flag $f(n, w)$.
$f(n, w) \in \{0, 1\}$	Deterministisches Fallback-Flag	$f(n, w) = 1$ falls $\text{valid}(n, w) = 0$ oder $\text{valid}_{\text{glob}}(n, w) = 0$, sonst 0.
η_{soft}	Fixe Konstante	Soft-Dämpfungsfaktor $\eta_{\text{soft}} := 10^{-2}$ (kanonisch).
$\kappa_n(w)$	Normativ (Soft-Fallback)	Effektiver Rückkopplungsfaktor: $\kappa_n(w) = \kappa_n^{\text{raw}}(w)$ bei $f = 0$, bzw. $\eta_{\text{soft}} \kappa_n^{\text{raw}}(w)$ bei $f = 1$.
$\kappa_{\text{raw}, \text{thr}}$	Schwellwert (Acceptance-Policy)	Schwellwert zur Hard/Soft-Fallback-Klassifikation; wird in Def. 2.3 fixiert (kein freier Parameter).
$f_{\text{hard}}(n, w), f_{\text{soft}}(n, w)$	Diagnostik/Gates	Klassifikation von Fallback-Instanzen anhand $ \kappa_n^{\text{raw}}(w) \geq \kappa_{\text{raw}, \text{thr}}$; steuert Pflicht-Logs $p_{\text{fb}, \text{hard}}(n)$ und Gates.
$p_{\text{fb}}(n), p_{\text{fb}, \text{hard}}(n), p_{\text{fb}, \text{soft}}(n)$	Pflicht-Logs (Acceptance)	Fallback-Raten im Schritt n ; hoher Hard-Fallback-Anteil markiert den Run als invalid.

4.10 Zellverteilung p und Zentrierung $\tilde{p}$ (antwort-/energie-/kanalbasiert)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$u_{B_w}^{(ij)}$	Randprobe (kanonisch)	Randbedingungen pro ungeordnetem Paar $0 \leq i < j \leq q - 1$: $u(i) = 1, u(j) = -1$, sonst 0 (Patch-1-Ordnung).
$u_{n,w}^{(ij)} : V_w \rightarrow \mathbb{R}$	Harmonische Fortsetzung	Deterministische harmonische Fortsetzung ins Innere (Solve-Semantik auf dem Innenblock); bei Solve-Fail: $u_I^{(ij)} \equiv 0$.
$\omega_{\{i,j\}}(n, w)$	Aus Raten-Differenzen	Gewichte der Randproben aus $\Delta r_{\{i,j\}}(n, w)$ (mit $\varepsilon_{\text{floor}}$ -Stabilisierung und Normierung über alle Paare).
$\pi(\cdot; n, w), \mathcal{A}_w$	Optionaler Trajektorienmodus	Diskrete Verteilung $\pi_a = \omega_a$ über Aktionen $\mathcal{A}_w$ (Paarindices); optional deterministische Auswahl a^* .
$\theta_{n,w} \in [0, 1], \text{Sel}(\theta, \pi)$	Deterministische (unbeobachtete) Auswahl	Selektionsfunktion Sel wählt aus π deterministisch anhand eines (unbeobachteten) Umweltzustands $\theta_{n,w}$.
$\mathcal{E}_{n,w}^{\text{raw}}(e)$	Antwort-/Kanalbasierte Edge-Energie (roh)	$\mathcal{E}_{n,w}^{\text{raw}}(e) := \sum_{i < j} \omega_{\{i,j\}}(n, w) c_n(e) (u^{(ij)}(a) - u^{(ij)}(b))^2$ für $e = \{a, b\}$.
$\mathcal{E}_{n,w}(e)$	Gewichtete Zellenergie	Zellbeitrag mit Mehrzuordnung: $\mathcal{E}_{n,w}(e) := \mu_{k,w}(e) \mathcal{E}_{n,w}^{\text{raw}}(e)$.
$Z_w^{(k)}$	Zellmasse (normativ)	$Z_w^{(k)} := \sum_{e \in E} \mu_{k,w}(e)$; bestimmt, ob adressierte Kanten existieren und normalisiert $\bar{p}_w$.
$\bar{p}_w(e)$	Referenzverteilung (aus Maß)	$\bar{p}_w(e) := \mu_{k,w}(e) / Z_w^{(k)}$ (für $Z_w^{(k)} > 0$); rein geometrische/maßbasierte Referenz pro Zelle.

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$p_{n,w}(e)$	Normierte Zellverteilung	Energie-zu-Wahrscheinlichkeit: $p_{n,w}(e) := \frac{\mathcal{E}_{n,w}(e) + \varepsilon_0 \bar{p}_w(e)}{\sum_{e'} \mathcal{E}_{n,w}(e') + \varepsilon_0}$.
$\tilde{p}_{n,w}(e)$	Zentrierung	$\tilde{p}_{n,w}(e) := p_{n,w}(e) - \bar{p}_w(e)$; Nullsumme über e (bei $Z_w^{(k)} > 0$).
$\bar{p}_\emptyset$	Randfall-Konvention	Für $w = \emptyset$: $\bar{p}_\emptyset := 1/ E_\emptyset $ (uniform auf $E_\emptyset$), sonst $\tilde{p}_{n,\emptyset} \equiv 0$ falls $ E_\emptyset = 0$.

4.11 Update-Exponent $\Delta_n(e)$

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$K_{\max}$	Aus Abschnitt 1 fixiert	Skalen-Upper-Bound: $K_{\max} := \max(L_{\max} - 1, 0)$; bestimmt die Zahl der aktiven Skalen im Update.
α_k	Aus Abschnitt 1 fixiert	Normierte Skalenweights (z. B. $\alpha_k = r_\star^k / \sum_{j=1}^{K_{\max}} r_\star^j$); $\sum_k \alpha_k = 1$ (falls $K_{\max} > 0$).
$\Delta_n(e)$	Normativ	Update-Exponent: $\Delta_n(e) = - \sum_{k=1}^{K_{\max}} \alpha_k \sum_{w \in W_k(e)} \mu_{k,w}(e) \kappa_n(w) \tilde{p}_{n,w}(e) - \mu_{0,\emptyset}(e) \kappa_n(\emptyset) \tilde{p}_{n,\emptyset}(e)$.

4.12 Leitwert-Update und Randenergie-Erhaltung (kein Freeze)

Symbol	Herkunft / Status	Zuständigkeit / Verwendung
$\tilde{c}_{n+1}(e)$	Provisorischer Update-Schritt	$\tilde{c}_{n+1}(e) := c_n(e) \exp(\Delta_n(e))$ für alle $e \in E$.
E_∂	Aus Abschnitt 3 normativ	Rand-inzidente Kantenmenge: $E_\partial := \{\{u, v\} \in E : u \in B_0 \text{ oder } v \in B_0\}$.
$c_{n+1}^{(\lambda)}(e)$	λ -Reskalierung (Gauge-Fix)	Reskaliert nur E_∂ : $c_{n+1}^{(\lambda)}(e) = \tilde{c}_{n+1}(e) \exp(\lambda)$ für $e \in E_\partial$, sonst $\tilde{c}_{n+1}(e)$.
λ_n	Deterministisch gewählt	Wird so bestimmt, dass die Randenergie-Summe erhalten bleibt: $\mathcal{E}_{B_0,n+1}^{\text{tot}}(\lambda_n) = \mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}}$.
$\mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}}$	Aus Abschnitt 3 normativ	Erhaltene Randenergie-Summe auf B_0 (aus Λ_n und Paarproben); globaler Ziel-Constraint.
$h_0, \gamma, N_{\text{expand}}, N_{\text{bisect}}$	Fixe numerische Konstanten (Bracketing/Bisect)	Policyparameter der deterministischen λ_n -Suche (Initialintervall, Expansionsfaktor, Iterationsbudgets).
T_E	Deterministische Toleranz	Float64-basierte Energietoleranz/Abbruchkriterium für die λ -Suche (rein numerisch; Definition im Text).

B Kanonische Modulstruktur und Symbol→Modul-Zuordnung (normativ)

B.1 Kanonische Modulstruktur (realgraph_oqs)

Diese Spezifikation fixiert eine kanonische Modulstruktur als Referenz für Implementierungen. Die Modulnamen sind *normativ* (für Compliance-/Audit-Trails); die konkrete Dateiorganisation innerhalb eines Repositories darf davon abweichen, sofern die extern sichtbaren Entry-Points und Reports die gleiche Modulzuordnung (und damit Traceability) bewahren.

Modul	#Symbole	Normativer Zuständigkeitsbereich
algebra/dtn_kron_laplacian	35	Laplace-Operator, DtN/Schur/Kron-Reduktion, Randantworten, lineare Löserpfade (über Policy).
driver/update	41	Driver: p, Δ , Update-Regel c_{n+1} , lambda-Suche/Budget, Fallbacks/Gates.
gui/streamlit	9	Streamlit-GUI als nicht-normativer Frontend-Wrapper der Orchestrierung.
ideal/trunk_builder	50	IDEAL-Trunk (SG), Approximanten, Vertex-/Edge-Indexierung, B0, Inklusionen, Grundgewichte.
metrics/resistance_embedding5		Widerstandsmetrik (grounded solve), MDS/harmonic embedding als Visualisierung.
misc/other	90	Hilfsfunktionen ohne normative Semantik (IO-Utilities, Formatierung, etc.).
oqs/channel_mismatch	27	OQS-Kanalbau (Choi), QRE/Mismatch, Kappa/Regularisierungen, Distanz-/Mismatch-Metriken gemäß Definition.
orchestration/run_meta	6	Run-Orchestrierung, env_lock, run_meta, Audit-Trail, Hashing/Export der Artefakte.
policy/determinism_numeric	48	D1-Determinismus: float64-Policy, deterministische RegSPD/Cholesky-Gates, Solve-Policy, Stabilisierung (eps-floor), PRNG-Verbot.

Tabelle 26: Kanonische Modulstruktur und Zuständigkeiten. Die Spalte #Symbole gibt die Anzahl der im Mapping `symbol_module_map_v4_rev6.json` diesem Modul zugeordneten Symbole an.

B.2 Normative Referenzdatei (JSON) und Hash

Die vollständige Symbol→Modul-Zuordnung ist als maschinenlesbare Referenzdatei festgelegt: `symbol_module_map_v4_rev6.json`. Die Datei ist *kanonisch* und Bestandteil dieser Spezifikation; ihr SHA256-Hash lautet:

e9505a32dacfbf2a8aebf45d1214767e9215220acac1e4f4a667264aa6e3baa7

Alle Implementierungen, die „exakt gemäß Definition“ beanspruchen, müssen eine vollständige Traceability-Matrix und ein Coverage-Gate liefern, die diese Zuordnung respektieren.

B.3 Symbol→Modul-Tabelle (druckbare Darstellung der JSON-Referenz)

Die nachfolgende Tabelle ist eine druckbare Darstellung derselben Zuordnung; im Zweifel gilt die oben genannte JSON-Referenzdatei (inkl. Hash) als Quelle der Wahrheit.

Symbol	Modul
$\bullet \in \{\text{SG}, \text{ST}\}$	ideal/trunk_builder
$S_\bullet$	misc/other
$q := S_\bullet $	algebra/dtn_kron_laplacian
$L \in \mathbb{N}_0$	ideal/trunk_builder
$L_{\max} \in \mathbb{N}_0$	ideal/trunk_builder
ℓ, k	misc/other
$n \in \mathbb{N}_0$	driver/update
$d_p \in \mathbb{N}$	misc/other
$R \in \mathbb{N}$	misc/other
$w \in S_\bullet^L$	ideal/trunk_builder
$u, v \in S_\bullet^L$	ideal/trunk_builder
$\emptyset$	ideal/trunk_builder
a^m	misc/other
$\widehat{V}_L := S_\bullet^L \times S_\bullet$	misc/other
$\sim_L$	gui/streamlit
$V_L^\bullet := \widehat{V}_L / \sim_L$	ideal/trunk_builder
$E_L^\bullet$	misc/other
$\iota_{\ell \rightarrow L} : V_\ell^\bullet \rightarrow V_L^\bullet$	misc/other
$V_\infty^\bullet := \varinjlim_L V_L^\bullet$	misc/other
$E_\infty^\bullet := \varinjlim_L E_L^\bullet$	ideal/trunk_builder
$G_\infty^\bullet := (V_\infty^\bullet, E_\infty^\bullet)$	ideal/trunk_builder
$K_L := \iota_L(V_L^\bullet) \subset V_\infty^\bullet$	ideal/trunk_builder
$V := V_{L_{\max}}^\bullet, E := E_{L_{\max}}^\bullet$	misc/other
$\mathcal{H}_{\text{tot}} := \ell^2(V_\infty^\bullet) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$	misc/other
$\mathcal{H}_S := \ell^2(S) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$	misc/other
P_S	misc/other
$B \subseteq V$	algebra/dtn_kron_laplacian
$\bar{B} := V \setminus B$	misc/other
$b_i = [(i^{L_{\max}}, i)]$	ideal/trunk_builder
$B_0 := \{b_i : i \in S_\bullet\}$	algebra/dtn_kron_laplacian
$b_{w,i} = [(w i^{L_{\max}- w }, i)]$	ideal/trunk_builder
$B_w := \{b_{w,i} : i \in S_\bullet\}$	algebra/dtn_kron_laplacian
$\prec, \text{id}(x) := \text{rank}_\prec(x)$	orchestration/run_meta
$d_G(\cdot, \cdot)$	misc/other
$R\text{-lokal}$	misc/other
$c_n : E \rightarrow (0, \infty)$	algebra/dtn_kron_laplacian
L_n	algebra/dtn_kron_laplacian
$\text{DtN}_B(L_n)$	algebra/dtn_kron_laplacian
$\text{Seed}_n(w) := \Lambda_{n,w}^{\text{glob}} := \text{DtN}_{B_w}(L_n)$	gui/streamlit
$\text{Aut}_{B_0}(V)$	ideal/trunk_builder
$\text{Stab}_{B_0}(L_n)$	misc/other
$w \sim_n w'$	gui/streamlit
$S_w := \frac{1}{2}(\text{Seed}_0(w) + \text{Seed}_0(w)^\top)$	misc/other
$\lambda_k(S_w)$	misc/other
$\varepsilon_{\text{mach}}, \varepsilon_{\text{floor}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{mach}}}$	policy/determinism_numeric
$q_w := \varepsilon_{\text{floor}} \max\{1, \ S_w\ _F\}$	orchestration/run_meta
$z_k(w) := \text{round}(\lambda_k/q_w)$	orchestration/run_meta
$\theta_{0,w} \in [0, 1)$	orchestration/run_meta
$\tau_{\text{Sel}} := \varepsilon_{\text{floor}}$	misc/other

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Modul
$\text{Sel}(\theta, \pi) \in \mathcal{A} \cup \{\perp\}$	misc/other
$\perp$	misc/other
IEEE float64	policy/determinism_numeric
$\varepsilon_{\text{mach}}$	policy/determinism_numeric
$\varepsilon_{\text{floor}}$	policy/determinism_numeric
ε	gui/streamlit
ε_0	driver/update
L_0	policy/determinism_numeric
L_0^{glob}	policy/determinism_numeric
$A^{(L)}$	ideal/trunk_builder
$\Delta_L(A)$	misc/other
$\ \cdot\ _F$	policy/determinism_numeric
$\rho_L := \rho(A^{(L)})$	misc/other
δ_L^{spec}	misc/other
$\lambda_i(\cdot)$	misc/other
τ_{rel}	policy/determinism_numeric
$\tau_{\text{rel}, \text{warn}}$	policy/determinism_numeric
τ_{spec}	policy/determinism_numeric
k_{stable}	policy/determinism_numeric
$\text{sym}(A)$	misc/other
$\text{Reg}_{\text{SPD}}^{(m)}(A)$	algebra/dtn_kron_laplacian
β_{reg}	policy/determinism_numeric
M_{reg}	policy/determinism_numeric
$\delta_0(A)$	policy/determinism_numeric
$\text{cholOK}(M)$	policy/determinism_numeric
$m_{\text{chol}}(A)$	policy/determinism_numeric
$g_{\min}(M), g_{\max}(M)$	misc/other
$\hat{\lambda}_{\min}(M), \hat{\lambda}_{\max}(M)$	misc/other
$\hat{\kappa}(M)$	driver/update
$\kappa_{\max}$	policy/determinism_numeric
$m(A)$	policy/determinism_numeric
$\delta_{\text{SPD}}(A)$	misc/other
$\text{Reg}_{\text{SPD}}(A)$	misc/other
$\text{solve}(\cdot, \cdot)$	policy/determinism_numeric
$f(n, w)$	driver/update
$\mathcal{W}, N_W := \mathcal{W} $	driver/update
$p_{\text{fb}}(n)$	driver/update
$p_{\text{fb}, \text{max}}, p_{\text{fb}, \text{hard}, \text{max}}$	policy/determinism_numeric
$p_{\text{fb}, \text{hard}}, p_{\text{fb}, \text{soft}}$	driver/update
$p_{\text{cond_fail}}$	policy/determinism_numeric
κ_{susp}	policy/determinism_numeric
$p_{\text{fb}, \text{hard}}^{(\kappa)}$	driver/update
$\mathcal{A}(n), N_A := \mathcal{A}(n) $	misc/other
$p_{\text{mreg}}(n)$	policy/determinism_numeric
$p_{\text{mreg}, \text{warn}}, p_{\text{mreg}, \text{max}}$	policy/determinism_numeric
$m_{\text{reg}, \text{max}}$	policy/determinism_numeric
λ_n	driver/update
$N_{\text{expand}}, N_{\text{bisect}}$	policy/determinism_numeric
$N_{\lambda, \text{max}}$	driver/update

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Modul
$\text{expm}_{\det}(A)$	oqs/channel_mismatch
$\ \cdot\ _1, \theta_{13}$	policy/determinism_numeric
$\log_{\det}(\rho)$	oqs/channel_mismatch
$\rho \succeq 0, \text{Tr}(\rho) = 1$	oqs/channel_mismatch
ρ_H	misc/other
τ_{deg}	policy/determinism_numeric
$C, \mathcal{E}_C, P_C$	misc/other
e_i, w_i	misc/other
$L_{\max}$	ideal/trunk_builder
L_{int}	misc/other
$K_{\max}$	ideal/trunk_builder
r_{SG}	misc/other
$r_{\star}$	misc/other
α_k	misc/other
k	ideal/trunk_builder
$n \in \mathbb{N}_0$	misc/other
E, V	ideal/trunk_builder
$c_0(e)$	misc/other
$L_n \in \mathbb{R}^{ V \times V }$	algebra/dtn_kron_laplacian
$(L_n)_{xy}$	algebra/dtn_kron_laplacian
$f: V \rightarrow \mathbb{R}$	misc/other
$\mathcal{E}_n(f)$	algebra/dtn_kron_laplacian
$f, g: V \rightarrow \mathbb{C}$	gui/streamlit
$\mathcal{E}_n(f, g)$	gui/streamlit
$\ell^2(V)$	ideal/trunk_builder
$d_p \in \mathbb{N}$	misc/other
$\mathcal{H} := \ell^2(V) \otimes \mathbb{C}^{d_p}$	ideal/trunk_builder
$\mathcal{H}_B, \mathcal{H}_{\bar{B}}$	misc/other
$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_{\bar{B}}$	oqs/channel_mismatch
$V_w = B_w \sqcup I_w$	ideal/trunk_builder
Π_B	misc/other
$P_B := \Pi_B \otimes I_{d_p}$	misc/other
I_{d_p}	misc/other
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	misc/other
σ_B	oqs/channel_mismatch
Φ_B	oqs/channel_mismatch
ι_B	ideal/trunk_builder
$\mathcal{H}_{V_w}$	misc/other
$\Phi_{B_w}^{(w)}$	oqs/channel_mismatch
$\mathcal{D}(\mathcal{H})$	oqs/channel_mismatch
$\mathcal{T}_n$	oqs/channel_mismatch
A_n	algebra/dtn_kron_laplacian
κ_n	misc/other
$H_n := \kappa_n(A_n \otimes I_{d_p})$	misc/other
Δt	misc/other
$U_n := \exp(-i\Delta t H_n)$	driver/update
$H_{n, B_0} := \kappa_n^{(\Lambda)}(\Lambda_n \otimes I_{d_p})$	algebra/dtn_kron_laplacian
$\kappa_n^{(\Lambda)}$	driver/update
$J_{x \rightarrow y}^{(n)}$	oqs/channel_mismatch

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Modul
$\mathcal{L}_n$	oqs/channel_mismatch
$\Psi_{n,B} := \Phi_B \circ \mathcal{T}_n \circ \iota_B$	oqs/channel_mismatch
$\rho_0^{(B)}, \rho_{n+1}^{(B)}$	ideal/trunk_builder
Λ_{n,B_0}	algebra/dtn_kron_laplacian
Λ_n	driver/update
$V = B_0 \sqcup I$	ideal/trunk_builder
$(L_n)_{BB}, (L_n)_{BI}, (L_n)_{IB}, (L_n)_{II}$	algebra/dtn_kron_laplacian
$(L_n)_{II, \text{reg}}$	policy/determinism_numeric
$X_{I \leftarrow B}^{\text{glob}}$	algebra/dtn_kron_laplacian
E_∂	ideal/trunk_builder
$S_\bullet, q := S_\bullet $	ideal/trunk_builder
$(b_0, \dots, b_{q-1})$	ideal/trunk_builder
$y^{(ij)}$	ideal/trunk_builder
$\mathcal{E}_{B_0,n}^{(ij)}$	driver/update
$\mathcal{E}_{B_0,n}(b_i)$	ideal/trunk_builder
$\mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}}$	driver/update
$ V_L , E_L $	misc/other
$\text{nnz}(L_n)$	algebra/dtn_kron_laplacian
$\text{nnz}(\Lambda_{n,B})$	algebra/dtn_kron_laplacian
$t_{\text{build}}, t_{\text{solve}}$	algebra/dtn_kron_laplacian
mem_{max}	misc/other
$L_n^\dagger$	gui/streamlit
e_x	misc/other
$R_n(u, v)$	metrics/resistance_embedding
$d_n(u, v)$	misc/other
V, E	ideal/trunk_builder
$\text{id}(x)$	misc/other
$c_n(a, b)$	misc/other
E_n^+	misc/other
$\text{CC}_n(x)$	misc/other
$R_n(u, v), d_n(u, v)$	misc/other
g	misc/other
π_g	misc/other
$L_n^{(g)}$	algebra/dtn_kron_laplacian
$S_n^{(g)}$	misc/other
δ_R	metrics/resistance_embedding
I	misc/other
b	misc/other
x	policy/determinism_numeric
$X_n : V \rightarrow \mathbb{R}^d$	ideal/trunk_builder
d	misc/other
$D = (d_n(u, v))$	metrics/resistance_embedding
viz_gauge	metrics/resistance_embedding
$Y_B : B_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$	gui/streamlit
$B = B_0, I = V \setminus B$	ideal/trunk_builder
$y_B^{(j)}, y_I^{(j)}$	ideal/trunk_builder
X_{ref}	ideal/trunk_builder
Procrustes (rigid)	misc/other
$a_{\text{vis}} > 0$	misc/other

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Modul
V_n	misc/other
policy_hash	policy/determinism_numeric
graph_hash	orchestration/run_meta
s_R	policy/determinism_numeric
$\mathcal{P}_R$	misc/other
$\mathcal{T}_R$	misc/other
$R_{\max}, d_{\max}$	misc/other
τ_R	metrics/resistance_embedding
τ_d	policy/determinism_numeric
τ_{res}	policy/determinism_numeric
res.nV	misc/other
res.nCC	misc/other
res.seed	misc/other
res.nPairs, res.nTris	misc/other
res.Rmax, res.dmax	misc/other
res.disc_pairs	misc/other
res.disc_inf_ok_frac	misc/other
res.Rmin	misc/other
res.diag_abs_max	misc/other
res.sym_abs_max	misc/other
r	misc/other
res.resid_rel_max	misc/other
Δ_{uvw}	misc/other
res.tri_viol_max, res.tri_viol_frac	policy/determinism_numeric
g'	misc/other
Δ_R^{ground}	misc/other
res.ground_delta_rel_max	misc/other
Gate-States	misc/other