

# Definition des IDEAL/REAL-Graph im Sinne prä-geometrischer offener Quantensysteme OQG auf SG/ST

antaris, ChatGPT5.2

21. Dezember 2025

## 1 IDEAL-Trunk (prä-geometrisch, SG/ST als p.c.f.-Approximanten)

**Literaturkontext.** Die hier verwendeten SG/ST-Approximanten werden als graphische Approximationen p.c.f. selbstähnlicher Mengen im Sinne der Fraktalanalyse verstanden.[1, 2]

### 1.1 Alphabet, Wörter, Notation

Fixiere einen Typ  $\bullet \in \{\text{SG}, \text{ST}\}$  und setze

$$S_\bullet := \begin{cases} \{0, 1, 2\}, & \bullet = \text{SG}, \\ \{0, 1, 2, 3\}, & \bullet = \text{ST}. \end{cases}$$

Für  $L \in \mathbb{N}_0$  sei  $S_\bullet^L$  die Menge aller Wörter  $w = (w_1, \dots, w_L)$  der Länge  $L$  über  $S_\bullet$ , mit  $S_\bullet^0 = \{\emptyset\}$ . Für ein Symbol  $a \in S_\bullet$  und  $m \in \mathbb{N}_0$  bezeichne  $a^m$  das Wort  $(a, \dots, a)$  der Länge  $m$  (bei  $m = 0$  das leere Wort). Konkatenation von Wörtern schreiben wir durch Nebeneinanderstellen.

### 1.2 Symbolische Vertexmengen und constant-tail Identifikation

Für jedes Level  $L \geq 0$  definiere die Rohmenge

$$\widehat{V}_L := S_\bullet^L \times S_\bullet \quad \text{mit Elementen } (w, i).$$

**Constant-tail Erzeugerrelation.** Definiere für jedes  $L \geq 1$  die kleinste Äquivalenzrelation  $\sim_L$  auf  $\widehat{V}_L$ , die für alle  $r \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ , alle Präfixe  $u \in S_\bullet^r$  und alle  $i \neq j \in S_\bullet$  die Identifikation erzwingt:

$$(u i j^{L-r-1}, j) \sim_L (u j i^{L-r-1}, i).$$

Für  $L = 0$  setze  $\sim_0$  als Gleichheit auf  $\widehat{V}_0 = \{\emptyset\} \times S_\bullet$ .

**Quotienten-Vertices.** Setze

$$V_L^\bullet := \widehat{V}_L / \sim_L, \quad [(w, i)]_{\sim_L} \in V_L^\bullet.$$

### 1.3 Kanonische Inklusion (Fixpunkt-Padding)

Für  $0 \leq \ell \leq L$  definiere

$$\iota_{\ell \rightarrow L} : V_\ell^\bullet \rightarrow V_L^\bullet, \quad \iota_{\ell \rightarrow L}([(w, i)]_{\sim_\ell}) := [(w i^{L-\ell}, i)]_{\sim_L}.$$

(Die Wohldefiniertheit folgt, da die Erzeugerrelationen durch Anhängen eines konstanten Tails wieder Erzeugerrelationen auf Level  $L$  induzieren.)

## 1.4 Level- $L$ -Kanten und Loop-Ausschluss

Fixiere ein Trunk-Level  $L_{\max} \in \mathbb{N}_0$  und setze  $V := V_{L_{\max}}^\bullet$ .

Definiere die (einfache) Kantenmenge

$$E := E_{L_{\max}}^\bullet := \left\{ \{x, y\} \subset V : \exists w \in S_{\bullet}^{L_{\max}}, \right. \\ \left. \begin{aligned} &\exists i \neq j \in S_{\bullet}, \\ &x = [(w, i)]_{\sim_{L_{\max}}}, y = [(w, j)]_{\sim_{L_{\max}}}, \\ &x \neq y \end{aligned} \right\}.$$

## 1.5 Randmenge $B_0$ (Corner-Vertices im Trunk)

Definiere für jedes  $i \in S_{\bullet}$  den Randknoten

$$b_i := [(i^{L_{\max}}, i)]_{\sim_{L_{\max}}} \in V, \quad B_0 := \{b_i : i \in S_{\bullet}\} \subset V.$$

**(1.5a) Kanonische Ordnung auf Wörtern und Repräsentanten.** Wir verwenden die lexikographische Ordnung auf  $S_{\bullet}^L$  (Vergleich an der ersten Position, an der sich zwei Wörter unterscheiden). Für Paare  $(w, i) \in S_{\bullet}^{L_{\max}} \times S_{\bullet}$  definieren wir

$$(w, i) <_{\text{lex}} (w', i') \iff (w <_{\text{lex}} w') \text{ oder } (w = w' \text{ und } i < i').$$

**(1.5b) Kanonische Repräsentantenabbildung und Vertex-IDs.** Für  $x \in V$  definiere die (nichtleere) Menge der Repräsentanten

$$\text{Rep}(x) := \{(w, i) \in \widehat{V}_{L_{\max}} : [(w, i)]_{\sim_{L_{\max}}} = x\}.$$

Definiere den kanonischen Repräsentanten

$$\text{repr}(x) := \min_{<_{\text{lex}}} \text{Rep}(x).$$

Ordne  $V$  strikt total durch  $x \prec y \iff \text{repr}(x) <_{\text{lex}} \text{repr}(y)$  und definiere die kanonische ID

$$\text{id}(x) := \text{rank}_{\prec}(x) \in \{0, 1, \dots, |V| - 1\}.$$

Damit ist  $\min(V)$  wohldefiniert als das eindeutig bestimmte  $x \in V$  mit minimaler  $\text{id}(x)$ .

**(1.5c) Deterministische Matrixkonvention (Subsets).** Für jede Teilmenge  $U \subseteq V$  fixieren wir die Reihenfolge der Elemente als aufsteigend nach  $\text{id}$ . Jede Submatrix  $M_{U,U}$  (z.B.  $(L_n)_{U,U}$ ) ist als Hauptuntermatrix in dieser Ordnung zu verstehen.

**(1.5d) Ordnung der Randknoten.** Wir identifizieren  $B_0 = \{b_i : i \in S_{\bullet}\}$  mit der geordneten Liste  $(b_i)_{i \in S_{\bullet}}$  in aufsteigender Symbolordnung. Alle Randvektoren/Matrizen (z.B.  $y^{(i)}, \Lambda_n$ ) werden in dieser Ordnung dargestellt. Analog ordnen wir  $B_w = \{b_{w,i} : i \in S_{\bullet}\}$  stets als  $(b_{w,i})_{i \in S_{\bullet}}$ .

## 1.6 IDEAL-Hinweis zur Energierenormierung

Für  $\bullet = \text{SG}$  ist die Standard-Energierenormierung  $r_{\text{SG}} = 3/5$  (äquivalent Skalierung  $(5/3)^m$ ) etabliert.[1, 3] Für  $\bullet = \text{ST}$  wird kein universeller offener Zahlenwert behauptet; wir führen stattdessen

$$r_{\star} \in (0, 1)$$

als Modellparameter (abhängig von der gewählten harmonischen Struktur) und setzen  $r_{\star} = r_{\text{SG}}$  im SG-Fall.

## 2 REAL-Graph als prä-OQS (vNext.3-canonical)

### 2.1 Numerische Kanonisierung (float64-deterministisch)

Wir arbeiten deterministisch in IEEE float64 und definieren

$$\varepsilon_{\text{mach}} := \text{eps}(\text{float64}), \quad \varepsilon_{\text{floor}} := \sqrt{\varepsilon_{\text{mach}}}, \quad \varepsilon := \varepsilon_{\text{floor}}, \quad \varepsilon_0 := \max\{r_{\star}^{L_{\text{max}}}, \varepsilon_{\text{floor}}\}.$$

**Geltungsbereich, Regularisierung und Rand-Constraint (Scope).** Die Operatoren  $\Lambda_n$ ,  $\Lambda_{n,w}$  und die Widerstandsmetrik  $d_n$  werden hier als *numerisch implementierbare* Größen in IEEE float64 definiert. Dazu gehören die deterministischen Regularisierungen  $\delta_{K,\text{glob}}$ ,  $\delta_K(n, w)$  und  $\delta_R$  (Cholesky-/Solve-Stabilisierung); diese sind *Teil der Definition* und ersetzen in der Implementationsschicht die nicht-robuste exakte Inversion/Pseudoinversion. Physikalisch sind sie *keine* Modellparameter, sondern eine maschinenpräzisionsgetriebene Stabilisierung (Grenzfall: exakte Arithmetik  $\Rightarrow \delta \rightarrow 0$ ).

Die Randenergie-Summe  $\mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}}$  ist als *Ziel-Constraint* formuliert: Wird  $\lambda_n$  per Bracketing+Bisektion gefunden, so gilt die Erhaltung bis auf die numerische Toleranz; falls die  $\lambda$ -Suche fehlschlägt, wird deterministisch  $\lambda_n := 0$  gesetzt und der Schritt als numerisch invalid markiert (dann ist die Erhaltung nicht garantiert). Mit der Fixierung aller Schalter/Defaults (insbesondere  $d_p$ ,  $m_B$ ,  $\sigma_B$ ) sowie der deterministischen Tie-break-Regeln ist die Dynamik vollständig deterministisch.

### 2.2 Parameterreduktion (kanonisch)

Fixiere  $L_{\text{max}}$  und setze

$$L_{\text{int}} := 1, \quad K_{\text{max}} := \max\{L_{\text{max}} - 1, 0\}.$$

Für  $K_{\text{max}} \geq 1$  definiere Skalenweights

$$\alpha_k := \frac{r_{\star}^k}{\sum_{j=1}^{K_{\text{max}}} r_{\star}^j}, \quad k = 1, \dots, K_{\text{max}},$$

und für  $K_{\text{max}} = 0$  ist die Summe über  $k$  leer (so dass nur der Corner–Corner-Fallback wirken kann, falls  $E_{\emptyset} \neq \emptyset$ ).

### 2.3 REAL-Zustand (Leitwerte), Laplacian, Energie

Ein REAL-Zustand zur Zeit  $n \in \mathbb{N}_0$  ist eine Leitwertfunktion

$$c_n : E \rightarrow (0, \infty).$$

**Initialisierung.** Setze deterministisch  $c_0(e) := 1$  für alle  $e \in E$ .

Definiere die gewichtete (loop-less) Laplacian  $L_n \in \mathbb{R}^{|V| \times |V|}$  durch

$$(L_n)_{xy} := \begin{cases} -c_n(\{x, y\}), & x \neq y \text{ und } \{x, y\} \in E, \\ 0, & x \neq y \text{ und } \{x, y\} \notin E, \\ \sum_{z: \{x, z\} \in E} c_n(\{x, z\}), & x = y. \end{cases}$$

Die zugehörige Dirichlet-Energie ist für  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mathcal{E}_n(f) := \frac{1}{2} \sum_{\{x, y\} \in E} c_n(\{x, y\}) (f(x) - f(y))^2 = \frac{1}{2} f^\top L_n f.$$

[4]

## 2.4 prä-OQS-Hilbertraum (optional prä-Partonen vorbereitet)

Fixiere  $d_p \in \mathbb{N}$  (Default:  $d_p = 1$ ) und setze

$$\mathcal{H}_V := \ell^2(V) \quad (\text{kanonische ONB } \{|x\rangle : x \in V\}), \quad \mathcal{H} := \mathcal{H}_V \otimes \mathbb{C}^{d_p}.$$

Alle Operatoren/Laplacians wirken kanonisch als  $L_n \otimes I_{d_p}$  auf  $\mathcal{H}$ .

## 2.5 prä-OQS-Channel auf den Rand (CPTP, Direkt-Summen-Coarse-Graining)

Sei  $P_{B_0} : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(V)$  der orthogonale Projektor mit

$$(P_{B_0}f)(x) = \mathbf{1}_{\{x \in B_0\}} f(x).$$

Setze  $P := P_{B_0} \otimes I_{d_p} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Fixiere eine Referenzdichtematrix  $\sigma_{B_0}$  auf  $\mathcal{H}$  mit  $P\sigma_{B_0}P = \sigma_{B_0}$ . Als kanonischen Default setzen wir

$$\sigma_{B_0} := \frac{1}{\text{Tr}(P)} P = \frac{1}{|B_0| d_p} P.$$

Definiere den CPTP-Kanal

$$\Phi_{B_0}(\rho) := P\rho P + \text{Tr}((I - P)\rho) \sigma_{B_0}.$$

(Hinweis: Dies ist ein deterministisches Projektions-/Ersetzungs-Coarse-Graining in der Direktzerlegung  $\ell^2(V) = \ell^2(B_0) \oplus \ell^2(V \setminus B_0)$ , keine ontische räumliche Tensorfaktorisierung.)

## 2.6 Vollständiger OQS-Zeitschritt (Repeated Interactions) + quantenbasierte Rückkopplung

**a. Diskreter OQS-Zeitschritt als CPTP-Kanal (Repeated Interactions).** Fixiere eine endliche ‘‘Ancilla’’-Hilbertraumdimension  $d_E \in \mathbb{N}$  (Default:  $d_E := 1$ ) und setze  $\mathcal{H}_E := \mathbb{C}^{d_E}$ . Fixiere einen (deterministischen) Ancilla-Startzustand  $\sigma_E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_E)$ ,  $\sigma_E \succeq 0$ ,  $\text{Tr}(\sigma_E) = 1$  (Default:  $\sigma_E := I_{d_E}/d_E$ ). Für jeden Zeitschritt  $n \in \mathbb{N}_0$  fixiere einen unitären Kopplungsoperator

$$U_n \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E).$$

Definiere den reduzierten Systemkanal

$$\mathcal{T}_n(\rho) := \text{Tr}_{\mathcal{H}_E}(U_n(\rho \otimes \sigma_E)U_n^\dagger), \quad \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \rho \succeq 0, \quad \text{Tr}(\rho) = 1.$$

Dann ist  $\mathcal{T}_n$  CPTP (Stinespring-Dilation).[7] Als *OQS-Zeitschritt mit Rand-Coarse-Graining* definieren wir

$$\rho_{n+1} := \Psi_n(\rho_n) := \Phi_{B_0}(\mathcal{T}_n(\rho_n)).$$

**Kanonische, graph-intrinsische Wahl von  $U_n$  (minimal, implementierbar).** Wir setzen (diskrete Zeit) eine feste Schrittweite  $\Delta t > 0$  und definieren

$$H_n := L_n \otimes I_{d_p} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad U_n := \exp(-i \Delta t (H_n \otimes I_{d_E} + I \otimes H_E + H_{\text{int},n})),$$

wobei  $H_E$  und  $H_{\text{int},n}$  *Modellwahl* sind. Als kanonischen Default setzen wir  $H_E := 0$  und  $H_{\text{int},n} := 0$ . Minimal genügt  $H_E = 0$  und eine lokal begrenzte Kopplung  $H_{\text{int},n}$ , die nur auf einem deterministisch fixierten Rand-/Patch-Support wirkt (z. B. auf  $\ell^2(B_0) \otimes \mathbb{C}^{d_p} \subset \mathcal{H}$ ). (Dies ist bewusst prä-geometrisch: keine Mannigfaltigkeit, keine Lorentzstruktur.)

**b. Kontinuierliches Zeitlimit (GKSL) als ableitbarer Effektivfall.** In “repeated interaction”-Modellen konvergiert die reduzierte Dynamik unter Standard-Skalierungen (weak coupling / continuous interaction limit) zu einer *quantum dynamical semigroup* mit Generator in GKSL/Lindblad-Form; dies rechtfertigt die Verwendung einer GKSL-Halbgruppe als Effektivebeschreibung, *statt* sie nur zu postulieren. [10, 11, 8, 9]

**c. Quanteninstrument (optional) als deterministische Feedback-Schnittstelle.** Fixiere für jedes  $n$  ein endliches Outcomeset  $\mathcal{Y}_n$  und Kraus-Operatoren  $\{K_{n,y} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}_{y \in \mathcal{Y}_n}$  mit

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}_n} K_{n,y}^\dagger K_{n,y} = I.$$

Definiere das (selektive) Instrument  $\mathcal{M}_{n,y}(\rho) := K_{n,y}\rho K_{n,y}^\dagger$  und den *nichtselektiven* (deterministischen) Kanal

$$\mathcal{M}_n(\rho) := \sum_{y \in \mathcal{Y}_n} \mathcal{M}_{n,y}(\rho).$$

Hinweis: Die Definition bleibt deterministisch, wenn ausschließlich  $\mathcal{M}_n$  verwendet wird. (Selektive Trajektorien  $y$  wären ein zusätzliches, optionales Sampling-Layer.)

**Default (kein Instrument).** Falls kein Instrument modelliert werden soll, setzen wir kanonisch

$$\mathcal{Y}_n := \{0\}, \quad K_{n,0} := I, \quad \mathcal{M}_n = \text{Id}, \quad \Rightarrow \quad \bar{\rho}_n = \rho_n.$$

**d. Quantum-first Makrosignale aus Zustandsfunktionalen (keine exogenen Signale).**

Für jedes Level  $k \in \{1, \dots, K_{\max}\}$  und Wort  $w \in S_{\bullet}^k$  definiere den orthogonalen Projektor

$$P_{I_w} : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(V), \quad (P_{I_w} f)(x) := \mathbf{1}_{\{x \in I_w\}} f(x),$$

und setze

$$\Pi_w := P_{I_w} \otimes I_{d_p} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad m_n(w) := \text{Tr}(\Pi_w \bar{\rho}_n), \quad \bar{\rho}_n := \mathcal{M}_n(\rho_n).$$

und definiere das kanonisch beschränkte Feedback-Signal

$$\kappa_n^q(w) := \tanh(m_n(w)) \in [0, 1).$$

Damit kann der Driver-B *geschlossen* werden, indem  $\kappa_n(w)$  (oder eine Mischung) aus  $\kappa_n^q(w)$  gebildet wird (siehe Driver-B).

**Gültigkeitsfenster / verbleibender klassischer Input.**

- *Kein Kontinuums-Input:* keine Mannigfaltigkeit, keine Metrik, keine Lorentz-/Poincaré-Struktur.
- *Verbleibende Spezifikationen:* diskrete Uhr  $(n, \Delta t)$ , Wahl von  $d_E, \sigma_E, H_{\text{int},n}$  und ggf. der Instrument-Kraus-Familie  $\{K_{n,y}\}$  (Modellentscheidungen, nicht Kontinuumsphysik).
- *GKSL als Effektivregime:* erfordert die üblichen Markov-/Grenzannahmen des repeated-interaction Limits.

## 2.7 Globales DtN/Kron auf $B_0$ und Randenergie-Summe (kein Freeze)

**Globales DtN/Kron auf  $B_0$  (deterministisch regularisiert).** Dies ist die (regularisierte) Kron-Reduktion bzw. der Dirichlet-to-Neumann-Operator des gewichteten Graphen.[5, 4]

Schreibe  $V = B_0 \sqcup I$  mit  $I := V \setminus B_0$  und blockzerlege (in der Patch-1-Subset-Ordnung)

$$L_n = \begin{pmatrix} (L_n)_{BB} & (L_n)_{BI} \\ (L_n)_{IB} & (L_n)_{II} \end{pmatrix}.$$

Falls  $I = \emptyset$ , setze  $\Lambda_n := (L_n)_{BB}$ . Falls  $I \neq \emptyset$ , definieren wir deterministisch

$$S_{II} := \frac{1}{2}((L_n)_{II} + (L_n)_{II}^\top), \quad \delta_{K,\text{glob}} := \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, \|S_{II}\|_F\}, \quad (L_n)_{II,\text{reg}} := S_{II} + \delta_{K,\text{glob}} I,$$

und setzen

$$\Lambda_n := (L_n)_{BB} - (L_n)_{BI} (L_n)_{II,\text{reg}}^{-1} (L_n)_{IB}.$$

(Kron-Reduktion als Schur-Komplement; deterministische Regularisierung zur Implementierbarkeit.)

**Randtests und Randenergie.** Fixiere den Ankerindex  $i_0 := \min(S_\bullet) = 0$ . Für jedes  $i \in S_\bullet \setminus \{i_0\}$  definiere  $y^{(i)} \in \mathbb{R}^{|B_0|}$  durch

$$y^{(i)}(b_i) = 1, \quad y^{(i)}(b_{i_0}) = 0, \quad y^{(i)}(b_j) = 0 \quad (j \neq i, i_0).$$

Definiere

$$\mathcal{E}_{B_0,n}^{(i)} := \frac{1}{2} (y^{(i)})^\top \Lambda_n y^{(i)}, \quad \mathcal{E}_{B_0,n}^{\text{tot}} := \sum_{i \in S_\bullet \setminus \{i_0\}} \mathcal{E}_{B_0,n}^{(i)}.$$

**Rand-inzidente Kantenmenge (kein Freeze).** Definiere

$$E_\partial := \{\{u, v\} \in E : u \in B_0 \text{ oder } v \in B_0\}.$$

Alle Kanten (auch  $E_\partial$ ) werden durch Driver-B mitgetrieben; zusätzlich wird per  $\lambda_n$  die Randenergie-Summe erhalten.

## 3 Widerstandsmetrik (zwei Optionen; Option 2 bevorzugt, umschaltbar)

### 3.1 Option 1 (konzeptuell): Pseudoinverse

Definiere (formal) für verbundene Graphen

$$R_n(u, v) := (e_u - e_v)^\top L_n^\dagger (e_u - e_v), \quad d_n(u, v) := \sqrt{R_n(u, v)}.$$

[6, 4, 1]

### 3.2 Option 2 (bevorzugt, implementierbar): grounded solve + deterministischer Jitter

Wähle deterministisch den Ground-Knoten

$$g := \arg \min_{x \in V} \text{id}(x).$$

Sei  $\pi_g : \mathbb{R}^{|V|} \rightarrow \mathbb{R}^{|V|-1}$  die Projektion, die die  $g$ -Komponente entfernt. Sei  $L_n^{(g)}$  die reduzierte Laplacian, die aus  $L_n$  durch Entfernen von Zeile/Spalte  $g$  entsteht (in Patch-1-Subset-Ordnung). Setze

$$\delta_R := \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, \|L_n^{(g)}\|_F\}.$$

Für  $u, v \in V$  definiere  $b := \pi_g(e_u - e_v)$  und löse deterministisch

$$(L_n^{(g)} + \delta_R I)x = b, \quad R_n(u, v) := b^\top x, \quad d_n(u, v) := \sqrt{R_n(u, v)}.$$

## 4 Driver-B (prä-geometrischer Feedback-Treiber; rand-inzident inklusive)

### 4.1 Adressmengen und kanonische LCP-Zuordnung von Kanten

Für  $x \in V$  definiere aus Patch 1:

$$A_x := \{w \in S_\bullet^{L_{\max}} : \exists i \in S_\bullet \text{ mit } (w, i) \in \text{Rep}(x)\}.$$

Für Wörter  $u, v \in S_\bullet^{L_{\max}}$  bezeichne  $\text{lcp}(u, v) \in S_\bullet^{\leq L_{\max}}$  den längsten gemeinsamen Präfix. Für eine Kante  $e = \{x, y\} \in E$  definiere die Kandidatenmenge der Präfixe

$$P(e) := \{\text{lcp}(u, v) : u \in A_x, v \in A_y\} \subseteq S_\bullet^{\leq L_{\max}}.$$

Falls  $P(e) = \emptyset$  (dies sollte für  $E$  gemäß der Kantenkonstruktion nicht auftreten), setze deterministisch

$$\text{lcp}^*(e) := \emptyset.$$

Andernfalls definiere deterministisch

$$\text{lcp}^*(e) := \min_{<_{\text{lex}}} \left\{ p \in P(e) : |p| = \max_{q \in P(e)} |q| \right\},$$

d.h. maximal nach Länge, Tie-break: lexikographisch minimaler Präfix. Setze

$$\ell(e) := |\text{lcp}^*(e)| \in \{0, 1, \dots, L_{\max}\}.$$

Für  $k \in \{1, \dots, K_{\max}\}$  definiere

$$w_k(e) := \begin{cases} \text{Präfix der Länge } k \text{ von } \text{lcp}^*(e), & \ell(e) \geq k, \\ \perp, & \ell(e) < k. \end{cases}$$

**a. Konvention für  $k = 0$ .** Wir identifizieren  $S_\bullet^0 = \{\emptyset\}$ . Für  $w = \emptyset$  setzen wir

$$B_\emptyset = B_0, \quad V_\emptyset := B_0, \quad I_\emptyset = \emptyset, \quad Q_{n, \emptyset} := (L_n)_{B_0, B_0}, \quad \Lambda_{n, \emptyset} := (L_n)_{B_0, B_0}.$$

Ferner setzen wir deterministisch

$$\text{valid}(n, \emptyset) := 1.$$

Ferner definieren wir die Corner–Corner–Kantenmenge

$$E_\emptyset := \{e \in E : \ell(e) = 0\}.$$

## 4.2 Zellränder $B_w$ , Zell-Vertexmengen $V_w$

Für  $k \in \{1, \dots, K_{\max}\}$  und  $w \in S_{\bullet}^k$  definiere die Zellrandknoten

$$b_{w,i} := [(w i^{L_{\max}-k}, i)]_{\sim L_{\max}} \in V, \quad i \in S_{\bullet}, \quad B_w := \{b_{w,i} : i \in S_{\bullet}\}.$$

Definiere die zugehörige Zellkantenmenge

$$E_w^{(k)} := \{e \in E : w_k(e) = w\}.$$

Definiere

$$V_w := \left( \bigcup_{e=\{u,v\} \in E_w^{(k)}} \{u,v\} \right) \cup B_w, \quad I_w := V_w \setminus B_w.$$

## 4.3 Lokaler loopy-Laplacian (physikalisch bevorzugt: principal submatrix + Shunts)

Für  $w \in S_{\bullet}^k$  definiere den lokalen loopy-Laplacian als Hauptuntermatrix

$$Q_{n,w} := (L_n)_{V_w, V_w}.$$

Dies entspricht: Off-Diagonalen nur für interne Kanten in  $E$  mit beiden Endpunkten in  $V_w$ , während die Diagonale alle inzidenten Leitwerte (inkl. Kopplungen nach außen) als Shunts enthält.

## 4.4 Lokales DtN/Kron auf $B_w$ (deterministisch; total definiert)

Blockzerlege  $Q_{n,w}$  nach  $V_w = B_w \sqcup I_w$ :

$$Q_{n,w} = \begin{pmatrix} (Q_{n,w})_{BB} & (Q_{n,w})_{BI} \\ (Q_{n,w})_{IB} & (Q_{n,w})_{II} \end{pmatrix}.$$

Falls  $I_w = \emptyset$ , setze  $\Lambda_{n,w} := (Q_{n,w})_{BB}$  und  $\text{valid}(n, w) := 1$ . Falls  $I_w \neq \emptyset$ , definiere

$$\begin{aligned} S_{II}(n, w) &:= \frac{1}{2}((Q_{n,w})_{II} + (Q_{n,w})_{II}^{\top}), \\ \delta_K(n, w) &:= \varepsilon_{\text{floor}} \cdot \max\{1, \|S_{II}(n, w)\|_F\}, \\ (Q_{n,w})_{II, \text{reg}} &:= S_{II}(n, w) + \delta_K(n, w)I. \end{aligned}$$

Setze  $\text{valid}(n, w) := 1$ , falls der Cholesky-Test für  $(Q_{n,w})_{II, \text{reg}}$  erfolgreich ist, sonst  $\text{valid}(n, w) := 0$ .

Falls  $\text{valid}(n, w) = 1$ , setze

$$\Lambda_{n,w} := (Q_{n,w})_{BB} - (Q_{n,w})_{BI} (Q_{n,w})_{II, \text{reg}}^{-1} (Q_{n,w})_{IB}.$$

Falls  $\text{valid}(n, w) = 0$ , setzen wir deterministisch

$$\Lambda_{n,w} := (Q_{n,w})_{BB}.$$

(Interpretation: Keine Inversion; nur die loopy-Randkopplung bleibt. Da  $\kappa_n(w)$  ohnehin durch  $\text{valid}$  auf 0 gesetzt wird, dient dies ausschließlich der Totalität der Definition.)

## 4.5 IDEAL-Referenzen für Driver-B

Definiere für alle  $w$  die IDEAL-Referenzen als

$$\Lambda_w^{\text{IDEAL}} := \Lambda_{0,w}, \quad \text{und analog ggf. } D_w^{\text{IDEAL}} := D_{0,w},$$

wobei  $D_{n,w}$  (falls verwendet) aus der Widerstandsmetrik  $d_n$  auf den Randpunkten  $B_w$  gebildet wird.

## 4.6 Mismatch-Funktionale (3 Alternativen; Default = DtN-Shape)

Definiere den “anchored trace”

$$\text{tr}_{\text{anch}}(M) := \sum_{i \in S_\bullet \setminus \{i_0\}} M_{ii},$$

in der Patch-1-Randordnung.

**a. (Default, physikalisch bevorzugt): DtN-Shape-Mismatch.** Setze

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}_{n,w} &:= \frac{\Lambda_{n,w}}{\max\{\text{tr}_{\text{anch}}(\Lambda_{n,w}), \varepsilon_{\text{floor}}\}}, \\ \widehat{\Lambda}_w^{\text{IDEAL}} &:= \frac{\Lambda_{0,w}}{\max\{\text{tr}_{\text{anch}}(\Lambda_{0,w}), \varepsilon_{\text{floor}}\}}, \\ \text{Mismatch}_n^{(1)}(w) &:= \|\widehat{\Lambda}_{n,w} - \widehat{\Lambda}_w^{\text{IDEAL}}\|_F. \end{aligned}$$

**b. (optional): Rand-Distanz-Mismatch über  $d_n$ .** Definiere

$$\begin{aligned} D_{n,w}(i, j) &:= d_n(b_{w,i}, b_{w,j}), \\ \widehat{D}_{n,w} &:= \frac{D_{n,w}}{\max\{\|D_{n,w}\|_F, \varepsilon_{\text{floor}}\}}, \\ \text{Mismatch}_n^{(2)}(w) &:= \|\widehat{D}_{n,w} - \widehat{D}_{0,w}\|_F. \end{aligned}$$

**c. (optional): Spektral-Mismatch von  $\widehat{\Lambda}_{n,w}$ .** Seien  $\lambda(\cdot)$  die sortierten Eigenwerte. Setze

$$\text{Mismatch}_n^{(3)}(w) := \|\lambda(\widehat{\Lambda}_{n,w}) - \lambda(\widehat{\Lambda}_{0,w})\|_2.$$

**Auswahl.** Fixiere einen Modus  $m_B \in \{1, 2, 3\}$  (Default  $m_B = 1$ ) und setze  $\text{Mismatch}_n(w) := \text{Mismatch}_n^{(m_B)}(w)$ .

## 4.7 Kappa-Sättigung und Override

Definiere

$$\begin{aligned} \kappa_n^{\text{geom,raw}}(w) &:= \tanh(\text{Mismatch}_n(w)) \in [0, 1), \\ \kappa_n^{\text{geom}}(w) &:= \begin{cases} \kappa_n^{\text{geom,raw}}(w), & \text{valid}(n, w) = 1, \\ 0, & \text{valid}(n, w) = 0, \end{cases} \\ \kappa_n^{\text{q}}(w) &:= \begin{cases} \tanh(m_n(w)), & \text{valid}(n, w) = 1, \\ 0, & \text{valid}(n, w) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Corner-Override (Totalität für  $w = \emptyset$ ).** Da  $m_n(w)$  nur für  $w \in \bigcup_{k=1}^{K_{\max}} S_\bullet^k$  definiert ist, setzen wir deterministisch

$$\kappa_n^{\text{q}}(\emptyset) := \kappa_n^{\text{geom}}(\emptyset).$$

Inbesondere gilt für den Default  $\theta = 1$ :

$$\kappa_n(\emptyset) = \kappa_n^{\text{geom}}(\emptyset).$$

Fixiere einen deterministischen Mischparameter  $\theta \in [0, 1]$  (Default  $\theta := 1$ ) und setze

$$\kappa_n(w) := (1 - \theta) \kappa_n^{\text{geom}}(w) + \theta \kappa_n^{\text{q}}(w).$$

Fixiere zusätzlich eine Polarität  $\sigma_B \in \{+1, -1\}$  (Default  $\sigma_B = +1$ ).

#### 4.8 Zellverteilung $p$ und Zentrierung $\tilde{p}$ (Dirichlet-Glättung)

Für  $k \in \{1, \dots, K_{\max}\}$ ,  $w \in S_{\bullet}^k$  und  $e \in E_w^{(k)}$  setze  $\varepsilon_{n,w}(e) := c_n(e)$ . Definiere (falls  $|E_w^{(k)}| > 0$ )

$$p_{n,w}(e) := \frac{\varepsilon_{n,w}(e) + \varepsilon_0/|E_w^{(k)}|}{\sum_{e' \in E_w^{(k)}} \varepsilon_{n,w}(e') + \varepsilon_0}, \quad \bar{p}_w := \frac{1}{|E_w^{(k)}|}, \quad \tilde{p}_{n,w}(e) := p_{n,w}(e) - \bar{p}_w,$$

und falls  $|E_w^{(k)}| = 0$  setze deterministisch  $\tilde{p}_{n,w} \equiv 0$ .

Analog für  $w = \emptyset$  und  $E_\emptyset$ :

$$p_{n,\emptyset}(e) := \frac{c_n(e) + \varepsilon_0/|E_\emptyset|}{\sum_{e' \in E_\emptyset} c_n(e') + \varepsilon_0}, \quad \bar{p}_\emptyset := \frac{1}{|E_\emptyset|}, \quad \tilde{p}_{n,\emptyset}(e) := p_{n,\emptyset}(e) - \bar{p}_\emptyset,$$

und falls  $|E_\emptyset| = 0$  setze  $\tilde{p}_{n,\emptyset} \equiv 0$ .

#### 4.9 Update-Exponent $\Delta_n$ (rand-inzident inklusive)

Für  $e \in E$  definiere

$$\begin{aligned} \Delta_n(e) := & -\sigma_B \sum_{k=1}^{K_{\max}} \alpha_k \mathbf{1}_{\{w_k(e) \neq \perp\}} \kappa_n(w_k(e)) \tilde{p}_{n,w_k(e)}(e) & (\text{für } K_{\max} = 0 \text{ ist die Summe leer}) \\ & -\sigma_B \mathbf{1}_{\{\ell(e)=0\}} \kappa_n(\emptyset) \tilde{p}_{n,\emptyset}(e). \end{aligned}$$

#### 4.10 Leitwert-Update (alle Kanten) + Randenergie-Erhaltung (kein Freeze) Provisorischer Update-Schritt.

$$\tilde{c}_{n+1}(e) := c_n(e) \exp(\Delta_n(e)), \quad \forall e \in E.$$

**Rand-Normalisierung über  $\lambda_n$ .** Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  definiere

$$c_{n+1}^{(\lambda)}(e) := \begin{cases} \tilde{c}_{n+1}(e) \exp(\lambda), & e \in E_\partial, \\ \tilde{c}_{n+1}(e), & e \notin E_\partial. \end{cases}$$

Sei  $\Lambda_{n+1}^{(\lambda)}$  die aus  $c_{n+1}^{(\lambda)}$  gebildete DtN-Matrix gemäß (R4), und  $\mathcal{E}_{B_0, n+1}^{\text{tot}}(\lambda)$  die daraus berechnete Randenergie-Summe.

Wir wählen  $\lambda_n$  deterministisch so, dass

$$\mathcal{E}_{B_0, n+1}^{\text{tot}}(\lambda_n) = \mathcal{E}_{B_0, n}^{\text{tot}}.$$

Die Bestimmung erfolgt deterministisch durch Bracketing + Bisektion (feste Iterationsbudgets; gleiche Reihenfolge).

**Deterministischer Fallback.** Falls das Bracketing/Bisection-Verfahren innerhalb eines festen Iterationsbudgets keine Lösung findet, setze deterministisch  $\lambda_n := 0$  und markiere den Schritt als numerisch invalid (Logging), ohne die Definition zu verlassen.

**Finaler Schritt.**

$$c_{n+1}(e) := c_{n+1}^{(\lambda_n)}(e), \quad \forall e \in E.$$

## 5 Literatur (Primärquellen)

### Literatur

- [1] J. Kigami, *Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993), 721–755.
- [2] J. Kigami, *Analysis on Fractals* (Author PDF / notes), 2000/2001.
- [3] R. S. Strichartz, *The Laplacian on the Sierpinski gasket via the method of averages*, Pacific J. Math. 201 (2001), 241–263.
- [4] M. Keller, D. Lenz, *Dirichlet forms and stochastic completeness of graphs and subgraphs*, J. Reine Angew. Math. 666 (2012), 189–223.
- [5] F. Dörfler, F. Bullo, *Kron Reduction of Graphs with Applications to Electrical Networks*, IEEE Trans. Circuits Syst. I 60 (2013), 150–163; arXiv:1102.2950.
- [6] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random Walks and Electric Networks*, Mathematical Association of America (1984).
- [7] W. F. Stinespring, *Positive functions on  $C^*$ -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 211–216.
- [8] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys. 48 (1976), 119–130. DOI: 10.1007/BF01608499.
- [9] V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, *Completely positive dynamical semigroups of  $N$ -level systems*, J. Math. Phys. 17 (1976), 821–825. DOI: 10.1063/1.522979.
- [10] S. Attal, Y. Pautrat, *From repeated to continuous quantum interactions*, Ann. Henri Poincaré 7 (2006), 59–104. DOI: 10.1007/s00023-005-0242-8.
- [11] L. Bruneau, A. Joye, M. Merkli, *Repeated interactions in open quantum systems*, J. Math. Phys. 55 (2014), 075204.